Саратовский государственный университет

Механико-математический факультет

Дудов С.И.

Оптимальное портфельное инвестирование

1 октября 2008 г.

Оглавление

Введение

Проблема риска — одна из ключевых в экономической деятельности человека. Учет такого фактора, как риск, напрямую отражается на конечном финансовом результате принятого решения. Толкование этого понятия неоднозначно и зависит от конкретной ситуации.

В главе 1 данного учебного пособия приводятся некоторые виды риска, способы их измерения и общие методы их снижения. Один из важных видов риска — инвестиционный. Основная связанная с ним задача, которая далее рассматривается, — формирование портфеля ценных бумаг через распределение инвестиционного капитала среди различных ценных бумаг.

Дело в том, что инвестиции в ценные бумаги в условиях неопределенности сопряжены с риском того, что фактическая доходность вложений может отличаться от ожидаемой доходности. Данное обстоятельство дает основание считать доходность ценной бумаги случайной величиной и выбор инвестиционной стратегии осуществлять на основе анализа ее числовых характеристик: математического ожидания, дисперсии, среднеквадратичного отклонения, ковариации с доходностью других ценных бумаг. При таком подходе математическое ожидание доходности актива соответствует *ожидаемой доходности*, а дисперсия или среднеквадратичное отклонение доходности могут использоваться в качестве меры риска вложений в актив.

Идеальной для инвестора стратегией инвестирования в рамках рассматриваемого подхода была бы стратегия, обеспечивающая достижение максимальной ожидаемой доходности при минимальном риске вложений. Однако одновременное достижение этих целей невозможно. Практика работы на финансовых рынках свидетельствует о том, что большему значению ожидаемой доходности обычно сопутствует и большее значение риска вложений.

Выбор портфеля ценных бумаг на основе учета его *ожидаемой доходности* и *риска* известен как подход «доходность – риск», который был впервые сформулирован Г. Марковицем. Дальнейшее развитие этот подход получил благодаря работам Дж. Тобина, У. Шарпа, С. Росса и др.

В рамках данного подхода предполагается, что инвестор стремится максимизировать ожидаемую доходность портфеля при заданном уровне риска, либо минимизировать риск при заданном уровне ожидаемой доходности посредством диверсификации вложений.

Основные главы 2–4 пособия посвящены соответствующей оптимизации структуры портфеля ценных бумаг, в том числе при возможности включать в портфель так называемые безрисковые активы.

В главе 5 рассматривается проблема статистического оценивания характеристик ценных бумаг, которые требуются для постановки и решения задач Г. Марковица – Дж. Тобина, на основе однофакторной эконометрической модели.

В заключительной главе 6 приводится модель оценивания финансовых активов CAPM, которая исходит из основного предположения о том, что рынок ценных бумаг находится в *состоянии равновесия*.

В изложении материала в значительной мере были использованы доступные источники [1]–[8] и особенно [3].

Для освоения материала требуются знания некоторых сведений из линейной алгебры, математического анализа, теории вероятностей и финансовой математики.

1 Общие методы снижения рисков финансовых операций

1.1 Понятие риска, виды рисков

Риск — одно из важнейших понятий, сопутствующих любой активной деятельности человека. Вместе с тем это одно из самых неясных и многозначных понятий. Однако во многих ситуациях суть риска хорошо понимается и воспринимается. Его содержание определяется той конкретной задачей, где данный термин используется.

Общее понятие экономического риска, пожалуй, можно сформулировать следующим образом:

риск — это вероятность или угроза потери лицом или организацией части своих ресурсов, части своих доходов, или появления дополнительных расходов.

Назовем некоторые виды рисков, связанные с экономической деятельностью человека.

- *Инвестиционный* — возникает за счет обесценивания инвестиционно-финансового портфеля, состоящего из собственных и приобретенных ценных бумаг.
- *Кредитный* — обусловлен возможностью невыполнения обязательств перед кредитором.
- *Процентный* — возникает за счет непредвиденного изменения процентных ставок.
- *Риск ликвидности* — возникает за счет неожиданного изменения кредитных и депозитных потоков.
- *Производственный* – связан с возможностью невыполнения фирмой своих обязательств перед заказчиком.
- *Риск разорения* — вероятность столь больших потерь, которые не могут быть компенсированы и ведут к разорению конкретного лица или организации.

Риски также подразделяются на:

- *динамические* — они связаны с непредвиденными изменениями стоимости основного капитала вследствие управленческих решений, а также рыночных или политических обстоятельств;
- *статические* — такие риски связаны с возможностью потерь реальных активов при нанесении ущерба собственности и потерь доходов из-за недееспособности организации.

Участники какого-либо экономического проекта при его анализе заинтересованы в недопущении его провала или убытков от него. Поэтому основная задача в условиях нестабильной и быстро меняющейся ситуации при анализе риска состоит в получении информации, необходимой для принятия решения о целесообразности участия в проекте и разработке мер по защите от возможных финансовых потерь.

Анализ риска конкретного экономического проекта обычно осуществляется в следующей последовательности:
– выявляются объективные и субъективные факторы, влияющие на риск;
– производится анализ данных факторов;
– дается оценка риска с позиций, определяющих финансовую состоятельность проекта;
– устанавливается допустимый уровень риска;
– проводится анализ отдельных операций по выбранному уровню риска;
– разрабатываются мероприятия по снижению риска.

Выделяют два принципиально разных пути, ведущих к снижению риска.

1-*й путь* состоит в компенсации рисков с помощью так называемых рисковых премий, которые представляют особой различного рода надбавки (к цене, уровню процентной ставки, тарифу и т.д.), выступающие в виде «платы за риск».

2-*й путь* заключается в управлении риском, которое осуществляется на основе диверсификации, приемов хеджирования, заключения форвардных контрактов, покупки опционов, страхования.

1.2 Измерение рисков

При обсуждении методов снижения рисков нам естественно понадобится давать количественную оценку риска того или иного действия лица, принимающего решение (ЛПР), или его финансовых операций, то есть измерять риск.

Мы остановимся, главным образом, на способе измерения риска, который используется в *инвестиционном анализе и страховом деле*. Данный способ измерения, фактически, исходит из косвенного определения риска, данного Ф. Найтом (1921). Он предложил различать риск и неопределенность.

Риск имеет место тогда, когда некоторое действие может привести к нескольким исходам с известным распределением их вероятностей. Если же распределение вероятностей неизвестно, то ситуация рассматривается как неопределенность.

При таком подходе, если ситуация позволяет его использовать, риск измеряется с помощью дисперсии или среднеквадратичного отклонения случайной величины показателя эффективности принимаемого решения от ожидаемого. В пользу выбора этого способа говорит тот факт, что чем меньше разброс (дисперсия) результата решения, тем он более предсказуем, то есть риск меньше. Если разброс равен нулю, то риск полностью отсутствует.

Конкретизируем предметно данный способ измерения риска.

Предположим, что в результате выполнения некоторой финансовой операции возможны n исходов с вероятностями возникновения p_i и доходностями q_i, $i = \overline{1, n}$. Таким образом, доход от финансовой операции является случайной величиной R. Ее *средний ожидаемый доход*, то есть математическое ожидание случайной величины R, есть

$$M[R] = p_1 q_1 + p_2 q_2 + \ldots + p_n q_n.$$

Для краткости последующей записи будем обозначать ее через m_R.

Дисперсия случайной величины R (дисперсия данной операции) есть

$$D[R] = M[(R - m_R)^2].$$

Риском данной операции будем называть *среднеквадратичное отклонение* случайной величины R

$$\sigma_R = \sqrt{D[R]}.$$

В качестве применения количественного значения риска рассмотрим выбор некоторым ЛПР одного из двух вариантов инвестиций в условиях риска.

Пусть имеются два проекта A и B, в которые ЛПР может вложить средства. Проект A в определенный момент в будущем дает случайную величину прибыли R_A. Предположим, что ее среднее ожидаемое значение (математическое ожидание) равно $m_A = M[R_A]$ с дисперсией $D[R_A] = M[(R_A - m_A)^2]$. Для проекта B числовые характеристики прибыли R_B как случайной величины соответственно равны

$$m_B = M[R_B], \quad D[R_B] = M[(R_B - m_B)^2].$$

Среднеквадратичные отклонения случайных величин R_A и R_B соответственно равны

$$\sigma_A = \sqrt{D[R_A]}, \quad \sigma_B = \sqrt{D[R_B]}.$$

Если оказалось, что имеет место один из случаев:

$$1)\ m_A \le m_B, \quad \sigma_A > \sigma_B; \qquad 2)\ m_A < m_B, \quad \sigma_A \ge \sigma_B,$$

то следует выбрать проект B.

Пример 1.1. Проект A с вероятностью 0.6 дает прибыль 15 млн рублей, однако с вероятностью 0.4 можно потерять 5.5 млн рублей. Для проекта B с вероятностью 0.8 можно получить прибыль 10 млн рублей и с вероятностью 0.2 возможны потери в 6 млн рублей. Какой проект выбрать?

Решение. Оба проекта имеют одинаковую среднюю прибыльность:

$$m_A = 0.6 \cdot 15 + 0.4 \cdot (-5.5) = 6.8,$$
$$m_A = 0.8 \cdot 10 + 0.2 \cdot (-6) = 6.8.$$

Однако среднеквадратичное отклонение для проекта A равно

$$\sigma_A = [0.6(15 - 6.8)^2 + 0.4(-5.5 - 6.8)^2]^{1/2} \approx 10.4,$$

а для проекта B —

$$\sigma_B = [0.8(10 - 6.8)^2 + 0.2(-6 - 6.8)^2]^{1/2} \approx 6.4\ .$$

Поэтому более предпочтителен проект B.

Если же имеют место случаи:

$$3)\ m_A < m_B, \quad \sigma_A < \sigma_B; \qquad 4)\ m_A > m_B, \quad \sigma_A > \sigma_B,$$

то решение о выборе проекта зависит от отношения ЛПР к риску. В последнем случае проект A характеризуется большим значением ожидаемой доходности, однако он более рискован. В случае 3) для проекта A риск меньше, но и ожидаемая доходность меньше по сравнению с проектом B. Субъективное отношение к риску с математической точки зрения можно учитывать с помощью функции полезности данного ЛПР.

Существуют и другие способы измерения риска, встречающиеся в различных конкретных задачах.

Риск разорения — измеряется через вероятность столь больших потерь, которые ЛПР не может компенсировать и которые, следовательно, ведут к разорению.

Пример 1.2. Пусть случайный доход финансовой операции имеет следующее распределение:

q	-50	-40	-35	100
p	0.1	0.2	0.5	0.2

Если считать, что потери 40 и более денежных единиц ведут к разорению, то риск разорения равен 0.3 . Серьезность риска разорения оценивается именно величиной соответствующей вероятности. Если она мала, то им часто пренебрегают.

Показатели риска в виде отношений. Если средства ЛПР равны C, то при превышении убытков Y над C возникает реальный риск разорения. Для предотвращения этого отношение $K_1 = Y/C$, называемое *коэффициентом риска*, ограничивают специальным числом ξ_1. Операции, для которых данный коэффициент превышает ξ_1, считают особо рискованными. Часто учитывают также вероятность p убытков Y и тогда рассматривают коэффициент риска $K_2 = pY/C$, который ограничивают другим числом ξ_2. В финансовом менеджменте чаще применяют обратные отношения C/Y и C/pY, которые называют *коэффициентами покрытия рисков* и которые ограничиваются снизу числами $1/\xi_1$ и $1/\xi_2$.

Именно такой смысл имеет так называемый коэффициент Кука, равный отношению

$$\frac{\text{Собственные средства}}{\text{Активы, взвешенные с учетом риска}} \, .$$

Коэффициент Кука используется банками и другими финансовыми компаниями. В роли весов при «взвешивании» выступают вероятности – риски потери соответствующего актива.

Кредитный риск — так называется вероятность невозврата в срок, взятого в кредит. Поясним измерение такого риска примером.

Пример 1.3. Статистика запросов кредитов в банке такова: 10% — государственные органы, 30% – другие банки, 60% — физические лица. Вероятности невозврата взятого кредита соответственно таковы: 0.01, 0.05, 0.2 .

Начальнику кредитного отдела доложили, что получено сообщение о невозврате кредита, но в факсовом сообщении имя клиента плохо пропечатано. Какова вероятность, что данный кредит не возвращает какой-то банк?

Решение. Вероятность невозврата найдем по формуле полной вероятности. Пусть H_1 — запрос, поступивший от госоргана, H_2 — от банка, H_3 — от физического лица и A — невозврат рассматриваемого кредита. Тогда

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}A + P(H_2)P_{H_2}A + P(H_3)P_{H_3}A =$$
$$= 0.1 \cdot 0.01 + 0.3 \cdot 0.05 + 0.6 \cdot 0.2 = 0.136 \, .$$

Вторую вероятность найдем по формуле Байеса. Имеем

$$P_A H_2 = \frac{P(H_2)P_{H_2}A}{P(A)} = \frac{0.015}{0.136} \approx \frac{1}{9}.$$

Как в реальности определяются все приведенные в примере данные, например, условные вероятности $P_{H_i}A$? По частоте невозврата кредита для соответствующей группы клиентов. Пусть физические лица взяли всего 1000 кредитов и 200 не вернули. Значит, соответствующая вероятность оценивается как 0.2. Соответствующие данные берутся из информационной базы данных банка.

Депозитный риск — вероятность досрочного отзыва депозита. Очевидно, что депозитный риск нарушает нормальную работу банка, заставляя его перегруппировать свои активы по другому, что всегда чревато потерями. Массовый отток депозитов вполне может привести к банкротству банка.

В общем случае депозитный риск зависит от длины анализируемого периода, динамики изъятия вкладов и других обстоятельств.

1.3 Диверсификация

Диверсификация капитала, то есть его распределение в различные финансовые операции, является самым распространенным способом снижения риска в инвестиционном деле. Приведем в краткой форме математическую основу метода.

Пусть $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ — некоторые финансовые операции, требующие одинаковых вложений, случайные величины доходности которых $\{R_i\}_{i=\overline{1,n}}$ ведут себя независимо. Обозначим через $\{m_i\}_{i=\overline{1,n}}$ и $\{\sigma_i\}_{i=\overline{1,n}}$ — соответствующие значения ожидаемой доходности и риска этих операций. Предположим, что у ЛПР есть возможность распределить свой капитал, достаточный для финансирования только одной операции, в равных долях в финансировании всех операций, получая впоследствии и соответствующую часть дохода от каждой операции. Поскольку случайная величина доходности от такого способа вложения есть

$$R = \frac{R_1}{n} + \frac{R_2}{n} + \ldots + \frac{R_n}{n},$$

то и ее ожидаемая доходность является средним арифметическим $m = (m_1 + m_2 + \ldots + m_n)/n$ от ожидаемых доходностей всех операций. Тогда дисперсия случайной величины R, учитывая независимость случайных величин R_i и R_j, есть

$$D[R] = M[(R-m)^2] = n^{-2} M\left[\left(\sum_{i=1}^{n} R_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\right)^2\right] =$$

$$= n^{-2} M\left[\left(\sum_{i=1}^{n}(R_i - m_i)\right)^2\right] = n^{-2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M[(R_i - m_i)(R_j - m_j)] =$$

$$= n^{-2}\sum_{i=1}^{n} M[(R_i - m_i)^2] = n^{-2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2.$$

Отсюда, если обозначим через σ^* максимальное значение из $\{\sigma_i\}_{i=\overline{1,n}}$, вытекает, что риск операции можно оценить как

$$\sigma = \sqrt{D[R]} \le \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}.$$

Таким образом, получаем важный вывод: при увеличении числа независимых финансовых операций ожидаемая доходность сконструированной нами операции находится на уровне среднего арифметического значения ожидаемых доходностей всех операций, а ее риск уменьшается, становясь сколь угодно малым числом при достаточно больших n.

Данный вывод называется *эффектом диверсификации* и представляет разумное правило работы на финансовом и других рынках. Этот же эффект воплощен в народной мудрости — «не клади все яйца в одну корзину». Принцип диверсификации гласит, что нужно проводить разнообразные, не связанные друг с другом операции. Тогда доходность окажется усредненной, а риск однозначно уменьшится.

Более подробно метод будет рассмотрен во 2-й главе на примере формирования портфеля ценных бумаг.

1.4 Хеджирование

При диверсификации ЛПР составляет новую операцию из нескольких, имеющихся в его распоряжении. При хеджировании (от англ. hedge — изгородь) ЛПР подбирает или даже специально конструирует новые операции, чтобы, проводя их совместно с основной, уменьшить риск.

Пример 1.4. По проекту российская фирма через полгода должна получить крупный платеж от украинской компании. Платеж равен 100 000 гривен (примерно 500 тыс. руб.) и будет произведен именно в гривнах. У российской фирмы есть опасения, что за ближайшие полгода курс гривны упадет по отношению к рублю. Фирма хочет подстраховаться от такого падения и заключает форвардный контракт с одним из украинских банков на продажу тому 100 000 гривен по курсу 5 рублей за гривну. Таким образом, что бы ни произошло за данное время с курсом рубль – гривна, российская фирма не понесет убытков.

В этом заключается суть хеджирования. При диверсификации особый смысл придавался независимости операций. Здесь подбираются операции, жестко связанные с основной, а точнее, отрицательно коррелированные с основной операцией.

Обратимся к математической основе метода хеджирования.

Действительно, пусть Q_1 — основная операция со случайной величиной доходности R_1, ожидаемой доходностью $m_1 = M[R_1]$ и риском $\sigma_1 = \sqrt{D[R_1]}$.

Для дополнительной операции Q_2 примем соответствующие обозначения: R_2, m_2, σ_2.

Если мы проводим операции Q_1 и Q_2 одновременно, то дисперсия случайной величины $R = R_1 + R_2$ есть

$$D[R] = M[(R_1 + R_2 - m_1 - m_2)^2] = M[(R_1 - m_1)^2] + M[(R_2 - m_2)^2] + \\ +2M[(R_1 - m_1)(R_2 - m_2)] = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2,$$

где $\rho_{12} = M[(R_1 - m_1)(R_2 - m_2)]/\sigma_1\sigma_2$ — коэффициент корреляции случайных величин R_1 и R_2.

Отсюда получаем вывод: чтобы риск $\sigma = \sqrt{D[R]}$ «суммарной» операции был меньше, чем риск σ_1 основной операции, необходимо чтобы дополнительная (хеджирующая) операция была не просто отрицательно коррелирована с основной, но даже $\rho_{12} < -\dfrac{\sigma_2}{2\sigma_1}$.

Пример 1.5. Пусть ЛПР решает проводить операцию Q_1. Ему советуют провести одновременно операцию S, жестко связанную с Q_1.

Q_1:

q	-10	20
p	0.5	0.5

;

S:

q	5	-5
p	0.5	0.5

;

	p	0.5	0.5
Q_1:	q	-10	20
S:	q	5	-5
Q:	q	-5	15

.

Вычислим характеристики операции Q_1 и суммарной операции $Q = Q_1 + S$:

$$M[R_{Q_1}] = 5, \quad D[R_{Q_1}] = 225, \quad \sigma_{Q_1} = 15,$$
$$M[R_Q] = 5, \quad D[R_Q] = 100, \quad \sigma_Q = 10.$$

Итак, средняя ожидаемая доходность операции не изменилась, а риск уменьшился. Причем, поскольку $M[R_S] = 0$, то проведение этой операции видимо не требует особых финансовых вложений.

1.5 Страхование

Можно рассматривать страхование как один из видов хеджирования. Поясним некоторые термины.

Страхователь (или застрахованный) — тот, кто страхуется.

Страховщик — тот, кто страхует.

Страховая сумма — сумма денежных средств, на которую застраховано имущество, жизнь, здоровье страхователя. Она выплачивается страховщиком страхователю при наступлении страхового случая. Выплата страховой суммы называется *страховым возмещением.*

Страховой платеж — выплачивается страхователем страховщику.

Обозначим страховую сумму через w, страховой платеж s, вероятность страхового случая p. Предположим, что застрахованное имущество оценивается в z. По правилам страхования $w \leq z$.

Таким образом, можно предложить следующую схему:

Операции	$1-p$	p
Страхования нет	0	$-z$
Операция страхования	$-s$	$w-z$
Итоговая операция (страхование есть)	$-s$	$w-s-z$

Найдем характеристики операции без страхования и итоговой операции. Из теории страхования известно, что при нулевой рентабельности страховщика можно считать, что $s = pw$. Получаем

Страхования нет: $M_1 = -pz, \quad D_1 = p(1-p)z^2, \quad \sigma_1 = z\sqrt{p(1-p)}.$

Итоговая операция: $M = -s(1-p) + p(w-s-z) = p(w-z) - s = -pz,$

$$D = s^2(1-p) + (w-s-z)^2 p - p^2 z^2.$$

Предположим далее, что $w = z$, то есть страховое возмещение равно оценке застрахованного имущества, тогда $D = 0$.

Таким образом, страхование представляется выгодным мероприятием с точки зрения уменьшения риска, если бы не страховой платеж. Иногда он составляет заметную часть страховой суммы.

1.6 Форвардная и фьючерсная торговля

Уменьшать риск позволяют и форвардные контракты. Такие контракты обязательны для исполнения обеими сторонами в будущем по ценам, зафиксированным в момент заключения контракта. Например, 1 января фермер заключает форвардный контракт с мельником на поставку тому пшеницы в августе по определенной цене. В январе невозможно предсказать, каков будет урожай пшеницы и какова будет реальная цена пшеницы в августе. Если она будет выше, чем в контракте, — прогадает фермер, а мельник выгадывает; а если цена будет ниже — выгадывает фермер, а в проигрыше окажется мельник. Фьючерсные контракты — также форвардные, но они стандартизованны, обезличены и ими торгуют на биржах.

Но почему такие контракты уменьшают риск? Дело в том, что снижение риска здесь происходит не только напрямую, но и косвенным образом: несомненно, форвардные контракты делают рынок более предсказуемым, более стабильным, а значит, менее рискованным.

Важным примером является *ипотечное кредитование* — долгосрочная ссудная операция под небольшие проценты под залог недвижимости, причем договоры об ипотечной ссуде действуют в неизменном виде десятки лет. Если система ипотеки хорошо развита, она представляет мощную силу, противостоящую любой нестабильности в стране, а также инфляции.

Рассмотрим примеры хеджирования в валютных сделках. Валютная сделка называется *спот*, если она осуществляется по сиюмоментной цене, и окончательный расчет должен быть произведен не позднее второго рабочего дня после дня совершения сделки. *Форвардный валютный контракт* — сделка, определяющая сумму валюты, которая должна быть обменена на другую валюту в определенный день в будущем по курсу, который записан в контракте. Форвардные операции служат для хеджирования возникающего валютного риска. Например, российский импортер купил товар в Германии. Счет был выписан в немецких марках и должен быть оплачен через 90 дней. Для устранения риска повышения курса немецкой марки за этот период импортер осуществляет форвардную покупку немецких марок.

Третий вид валютных сделок — это операция *своп*, которая представляет собой сочетание покупки валюты на условиях спот и ее одновременной форвардной продажи. Операция спот весьма распространена. Когда речь идет о простой форвардной операции, то используют термин *аутрайт.*

1.7 Опционы

Опционы являются производными ценными бумагами, производным финансовым инструментом. Организованная торговля ими началась только в 1973 году.

Опцион на покупку (call-option) дает право его владельцу (держателю опциона) купить актив по установленной в документе цене не позже определенной даты (*американский опцион*) или на момент такой даты (*европейский опцион*). Такая цена называется ценой исполнения. Владелец опциона может отказаться от покупки актива без всяких штрафов.

Аналогично опцион на продажу (put-option) дает право его владельцу продать актив по установленной в этом документе цене не позже определенной даты (*американский опцион*) или на момент такой даты (*европейский опцион*).

Далее будем рассматривать только европейские опционы. Тот, кто выписал опцион, то есть его продавец, имеет определенное обязательство во все время действия опциона. В частности, если он выписал опцион на покупку, то несет обязательства обеспечить поставку актива по цене исполнения, а если он выписал опцион на продажу, то должен купить актив по цене исполнения в момент исполнения опциона.

Наоборот, держатель опциона никаких обязательств не имеет, но он покупает опцион и платит выписавшему опцион сумму, называемую *премией*, или просто стоимостью опциона.

Рассмотрим более подробно европейский опцион на покупку. Когда наступает дата исполнения опциона, то держатель опциона сравнивает рыночную цену на актив S и цену исполнения R, то есть указанную в опционе. Если $S > R$, то он реализует свое право покупки актива по цене R, покупает актив по этой цене (и может немедленно его же продать и получить прибыль $S - R$). Но как фактически реализуется его право купить актив по более низкой цене, чем рыночная? Такое право ему обеспечивает продавец опциона, поставляя физический актив или доплачивая разницу $S - R$ держателю опциона. Это обязательство обеспечивается специальным биржевым механизмом — клиринговой палатой. Но если рыночная цена не превышает цену исполнения, то держателю опциона незачем покупать актив, тогда он в проигрыше, так как за опцион заплатил премию и она пропала зря.

Следовательно, опцион на покупку покупают тогда и те, кто надеется на повышение рыночной цены актива к дате исполнения опциона.

Аналогично обстоит дело и с опционом на продажу.

Американский опцион можно предъявить к исполнению в любой момент не позже определенной даты. Поэтому держатель опциона все время в напряжении: а вдруг сейчас и есть этот самый выгодный момент и дальше может быть только хуже. Из-за возможности выбора американский опцион стоит дороже.

При организованной торговле опционами они обезличены и становятся совершенно обычными ценными бумагами на предъявителя. Опцион может быть куплен или продан в любой момент до даты его исполнения. Очевидно, что цена опциона на покупку в момент исполнения есть $C = \max\{0, S - R\}$, а цена опциона на продажу $C = \max\{0, R_S\}$.

Отыскание справедливой цены опциона — одна из интереснейших и сложных с математической точки зрения задач. Одна из идей определения цены опциона состоит в создании безрискового портфеля путем покупки актива и продажи (выписки) нескольких опционов на покупку этого же актива. Последующий анализ портфеля позволяет определить стоимость опциона.

Ограничимся рассмотрением простого примера, когда поведение цены актива описывается биноминальной однопериодной моделью.

Итак, пусть цена актива $S = 60$ денежных единиц (д.е.), такова же и цена исполнения опциона на покупку. Срок действия опциона европейского типа — один месяц. Предположим, что к концу месяца с вероятностью 0.5 цена актива либо поднимется на 15 д.е., либо опустится на столько же. В первом случае опцион непосредственно перед исполнением будет стоить 15 д.е., во втором случае не будет стоить ничего. Поэтому в первом случае продавец опциона должен заплатить держателю опциона 15 д.е., во втором случае он ничего не платит. Так как размах колебаний цен актива равен 30 д.е. и ровно в два раза превосходит колебания стоимости опциона перед исполнением, то для создания безрискового портфеля продавец опционов должен выписать 2 опциона на покупку.

Проверим, что портфель из актива и двух опционов действительно безрисковый. В самом деле, к концу месяца цена актива будет либо 75 д.е., либо 45 д.е. В первом случае владелец портфеля вынужден будет доплатить держателям опционов 30 д.е., во втором случае — ничего. В обоих случаях к концу месяца портфель будет стоить 45 д.е. независимо от цены актива. Это и означает его безрисковость.

Теперь перейдем непосредственно к определению цены опциона. Пусть банковская безрисковая ставка равна 10%. Так как портфель безрисковый, то его современная стоимость получается дисконтированием по данной безрисковой ставке: $45/(1+0.1) \approx 41$ д.е. Но сейчас актив стоит 60 д.е., поэтому два опциона вместе стоят $60 - 41 = 19$ д.е. Следовательно, один опцион стоит 9.5 д.е. За такую цену оба опциона и должны быть проданы.

Интересно проследить за состоянием продавца опционов. Сначала у него был актив стоимостью 60 д.е. Потом он выписал и продал два опциона на 19 д.е. Теперь у него актив стоимостью 60 д.е., денег 19 д.е. и обязательства по обеспечению двух опционов на 19 д.е., которые образуют его пассив. Актив и пассив вместе образуют безрисковый портфель стоимостью 41 д.е. К концу месяца 19 д.е. возрастут по безрисковой ставке до $19(1 + 0.1) = 21$ д.е., стоимость безрискового портфеля возрастет по безрисковой ставке до $41(1+0.1) = 45$ д.е. Всего у продавца опционов будет $21+45 = 66$ д.е. — в точности, как если бы его актив был безрисковым, и его стоимость возросла бы по безрисковой ставке до $60(1 + 0.1) = 66$ д.е. Таким образом хеджирование полностью оградило от риска.

Контрольные вопросы

Выберите правильный вариант (варианты) ответа

Begin Quiz

1. Инвестиционный риск возникает за счет

- ☐ неожиданного изменения кредитных и депозитных потоков,
- ☐ невыполнения обязательств перед кредитором,
- ☐ непредвиденного изменения процентных ставок,
- ☐ обесценивания портфеля, состоящего из собственных и приобретенных ценных бумаг,
- ☐ возможности невыполнения фирмой своих обязательств перед заказчиком,

2. Риском финансовой операции со случайной величиной доходности R называется

- ☐ дисперсия случайной величины R,
- ☐ среднеквадратичное отклонение случайной величины R,
- ☐ математическое ожидание случайной величины R.

3. Если финансовый проект A характеризуется бóльшим значением ожидаемой доходности и бóльшим значением риска по сравнению с проектом B, то

- ☐ следует выбрать проект A,
- ☐ следует выбрать проект B,
- ☐ решение о выборе будет зависеть от индивидуального отношения к риску лица, принимающего решение.

4. Диверсификация капитала это

- ☐ распределение его в различные финансовые операции,
- ☐ его вложение в финансовые операции с максимальной ожидаемой доходностью,
- ☐ его вложение в финансовые операции с минимальным риском.

5. Равномерное распределение капитала при увеличении числа независимых финансовых операций позволяет

- ☐ уменьшать риск при среднем ожидаемом значении доходности,
- ☐ увеличивать ожидаемую доходность при среднем значении риска,

- [ ] одновременно увеличивать ожидаемую доходность и уменьшать риск.

6. Хеджирующая операция по отношению к основной финансовой операции по случайной величине доходности должна

- [ ] вести себя независимо,
- [ ] находиться в отрицательной корреляции,
- [ ] находиться в положительной корреляции.

7. Страховой платеж это

- [ ] то же самое, что и страховое возмещение,
- [ ] сумма, выплачиваемая страхователем страховщику,
- [ ] сумма, на которую застраховано имущество, жизнь или здоровье страхователя.

8. После заключения форвардного контракта в будущем

- [ ] одна из сторон может отказаться от выполнения его условий,
- [ ] обе стороны обязаны выполнять его условия,
- [ ] стороны по своему усмотрению могут изменять условия контракта.

9. Владелец европейского опциона на покупку

- [ ] может купить актив по цене исполнения в любой момент не позже определенной даты,
- [ ] может купить актив по цене исполнения только на момент определенной даты или отказаться от покупки,
- [ ] может купить актив по определенной цене после определенной даты,
- [ ] обязан купить актив по цене исполнения на момент даты исполнения.

End Quiz

Набрано баллов ______ Correct

2 Проблема выбора портфеля ценных бумаг

2.1 Подход к формированию портфеля на основе показателей доходности и риска

Инвестиции в ценные бумаги в условиях неопределенности сопряжены с риском того, что фактическая доходность может отличаться от ожидаемой доходности. Это дает основание рассматривать доходность R ценной бумаги, соответствующую некоторому периоду владения, как случайную величину, а выбор инвестиционной стратегии осуществлять на основе анализа ее числовых характеристик: математического ожидания, дисперсии, среднеквадратичного отклонения. Математическое ожидание $m = M[R]$ доходности актива соответствует *ожидаемой доходности*, а дисперсия $\sigma^2 = D[R]$ или среднеквадратичное отклонение σ доходности могут использоваться как *меры риска* вложений в данный актив.

Идеальной для инвестора стратегией инвестирования в рамках данного подхода была бы стратегия, обеспечивающая достижение максимальной ожидаемой доходности при минимальном риске вложений. Однако одновременное достижение этих целей невозможно. Практика работы на финансовых рынках говорит о том, что большему значению ожидаемой доходности обычно соответствует и большее значение риска вложений.

Инвестируя в активы с более высоким риском, инвесторы, как правило, рассчитывают на достижение более высокой доходности в виде *премии за риск.*

Существование двух противоположных целей инвестирования позволяет сделать два важных вывода.

1. При осуществлении финансовых инвестиций в условиях неопределенности необходимо учитывать не только ожидаемую доходность, но и риск финансовых активов, причем притязания инвесторов относительно доходности и риска должны быть сбалансированы.

2. Не следует вкладывать весь капитал в один актив. Действительно, вкладывая весь свой капитал лишь в один актив, инвестор обрекает себя либо на заведомо низкую доходность, либо на заведомо высокий риск.

Следствием второго вывода является необходимость *распределения* (*диверсификации*) капитала между разными активами.

Распределение инвестируемого капитала среди различных ценных бумаг приводит к формированию портфеля ценных бумаг инвестора. За счет использования «эффектов портфеля» инвестор может достичь приемлемых для себя значений ожидаемой доходности и риска вложений.

В этом состоит главное преимущество портфельного инвестирования по сравнению с инвестициями в отдельные ценные бумаги.

Выбор портфеля ценных бумаг на основе учета его *ожидаемой доходности* и *риска* известен как подход «доходность — риск», который впервые был сформулирован Г. Марковицем. Дальнейшее развитие подход получил благодаря работам Дж. Тобина, У. Шарпа, С. Росса и др.

В рамках данного подхода предполагается, что инвестор стремится максимизировать ожидаемую доходность портфеля при заданном уровне риска, либо минимизировать риск при заданном уровне ожидаемой доходности посредством диверсификации вложений.

Используются следующие предположения относительно предпочтений инвестора:

1) о «ненасыщаемости» инвестора: при выборе из двух идентичных во всем, кроме ожидаемой доходности, портфелей инвестор выбирает портфель с большей ожидаемой доходностью;

2) о том, что инвестор избегает риска: при выборе из двух идентичных во всем, кроме риска, портфелей он предпочитает портфель с меньшим риском.

2.2 Формулы доходности и риска портфеля

Итак, предположим, что инвестор может вложить свой капитал в покупку n видов ценных бумаг, сформировав тем самым *портфель ценных бумаг*. Пусть x_i — доля общего вложения, приходящаяся на i-й вид ценных бумаг, $i = \overline{1,n}$. Таким образом, $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$. Вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ определяет *структуру* портфеля ценных бумаг. Значения x_i интерпретируются следующим образом:

а) $x_i > 0$ означает, что доля x_i капитала инвестора вложена в ценные бумаги i-го вида;

б) $x_i = 0$ означает, что ценные бумаги i-го вида отсутствуют в портфеле;

в) $x_i < 0$ означает, что относительно ценных бумаг i-го вида совершена операция *короткая продажа*[1] (short sale); средства, полученные за счет данной операции, составляют долю $|x_i|$ от первоначального капитала инвестора и использованы им для покупки других ценных бумаг.

Пусть R_i — случайная величина доходности ценных бумаг i-го вида, как если бы весь капитал инвестора был бы целиком вложен в их по-

[1] Операция «короткая продажа» состоит в продаже ценных бумаг, взятых в долг. Операцию проводит инвестор – спекулянт, рассчитывающий на падение курса данных ценных бумаг до истечения срока возврата. В этом случае он получает прибыль за счет разницы цен продажи и покупки.

купку, $i = \overline{1,n}$. Тогда случайная величина R_p доходности портфеля со структурой, задаваемой вектором $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, есть очевидно

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} R_i x_i.$$

Следовательно, ожидаемая доходность такого портфеля соответствует формуле

$$m_p = M[R_p] = \sum_{i=1}^{n} x_i M[R_i] = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \tag{2.1}$$

где $m_i = M[R_i]$ — ожидаемая доходность от ценных бумаг i-го вида, если бы в них вложили весь капитал.

Отклонение случайной величины доходности портфеля от ожидаемой доходности есть случайная величина

$$R_p - m_p = \sum_{i=1}^{n} x_i (R_i - m_i).$$

Теперь можно выразить математическое ожидание квадрата этого отклонения, то есть дисперсию случайной величины R_p

$$\begin{aligned} D_p = M[(R_p - m_p)^2] &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j M[(R_i - m_i)(R_j - m_j)] = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j\,, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где величины $V_{ij} = M[(R_i - m_i)(R_j - m_j)]$ являются ковариациями случайных величин R_i и R_j. Очевидно, что значения

$$V_{ii} = M[(R_i - m_i)^2] = \sigma_i^2$$

являются дисперсиями случайных величин R_i, а σ_i — соответствующие среднеквадратичные отклонения — риск i-х ценных бумаг.

2.3 Эффекты портфельного инвестирования

1. Случай взаимно независимых ценных бумаг. Предположим, что случайные величины R_i ведут себя попарно независимо (некоррелированы), то есть $V_{ij} = 0$ при $i \neq j$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$. Тогда из (2.2) получаем

$$D_p = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2,$$

а среднеквадратичное отклонение случайной величины R_p от ожидаемого значения равно

$$\sigma_p = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2\right)^{1/2}.$$

Данная величина характеризует риск, связанный с вложением в портфель ценных бумаг. Ее обычно называют *риском портфеля.*

Допустим, что инвестор вложил свои деньги равными долями во все ценные бумаги. Тогда $x_i = 1/n$ для $i = \overline{1, n}$, и в соответствии с (2.1) ожидаемая доходность такого портфеля

$$m_p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i,$$

а риск портфеля равен

$$\sigma_p = \left(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)^{1/2}. \tag{2.3}$$

Пусть $\overline{\sigma} = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sigma_i$. Тогда из (2.3) получаем

$$\sigma_p \le \frac{1}{n}\overline{\sigma}.$$

Вывод: при росте числа видов попарно независимых ценных бумаг, включаемых в портфель в равных долях, риск портфеля уменьшается и стремится к нулю при $n \to \infty$. В теории финансового риска этот результат известен как *эффект диверсификации портфеля.*

Пример. Ожидаемые значения доходности и их среднеквадратичные отклонения приведены в табл. 2.1

Таблица 2.1

i	1	2	3	4	5	6
m_i	11	10	9	8	7	6
σ_i	4	3	1	0.8	0.7	0.7

Если инвестор вложит свой капитал поровну в ценные бумаги только первых двух видов, то ожидаемая доходность портфеля

$$m_p = \frac{1}{2}(10 + 11) = 10.5,$$

но зато риск портфеля окажется меньше, чем наименее рисковый из них:

$$\sigma_p = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + 3^2} = 2.5 \ .$$

В табл. 2.2 показаны ожидаемые доходности и риски портфелей, составленных поровну из первых двух, трех и т.д. ценных бумаг с m_i и σ_i из табл. 2.1

Таблица 2.2

n	2	3	4	5	6
m_p	10.5	10	9.5	9	8.5
σ_p	2.5	1.7	1.23	1.04	0.87

Диверсификация позволила еще снизить риск почти втрое при потере ожидаемой эффективности всего на 20%.

2. Влияние корреляции. На самом деле в экономике все обычно взаимосвязано. Например, при снижении деятельности автомобилестроительных фирм уменьшаются закупки металла у металлургов, которые, в свою очередь, снижают закупки сырья и энергии и т.д. Как же отражается корреляция доходностей различного вида ценных бумаг на характеристики всего портфеля?

Очевидно, она не влияет на ожидаемую доходность m_p. Однако, напомним, формула дисперсии доходности портфеля со структурой, задаваемой вектором $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ имеет вид (2.2), где существенную роль играют величины V_{ij} — ковариации случайных величин доходностей ценных бумаг. Введем в рассмотрение величины

$$\rho_{ij} = \frac{V_{ij}}{\sigma_i \sigma_j},$$

которые называют *коэффициентами корреляции*. Тогда формулу для дисперсии (2.2) можно переписать в виде

$$D_p = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\sigma_i x_i)(\sigma_j x_j)\rho_{ij}. \tag{2.4}$$

Чтобы понять влияние корреляции, рассмотрим простейшие случаи.

Пусть все $\rho_{ij} = 1$. Это так называемый случай прямой корреляции. Тогда из (2.4) имеем

$$\begin{aligned} D_p = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\sigma_i x_i)(\sigma_j x_j) = \left(\sum_{i=1}^{n}\sigma_i x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_j x_j\right) = \\ = \left(\sum_{i=1}^{n}\sigma_i x_i\right)^2 . \end{aligned} \tag{2.5}$$

Теперь попробуем произвести простую диверсификацию, вложив деньги в равных долях, то есть $x_i = 1/n$, $i = \overline{1,n}$. Тогда получаем

$$D_p = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\right)^2, \quad \sigma_p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i.$$

Если обозначим через

$$\overline{\sigma} = \max_{i=\overline{1,n}} \sigma_i, \quad \underline{\sigma} = \min_{i=\overline{1,n}} \sigma_i,$$

то независимо от n имеем оценки

$$\underline{\sigma} \leq \sigma_p \leq \overline{\sigma}.$$

Таким образом, при полной корреляции диверсификация не дает положительного эффекта: риск портфеля не уменьшается с увеличением числа видов ценных бумаг, включаемых в портфель.

Например, цены акций электроэнергетической и нефтяных компаний изменяются пропорционально. Цены на нефть меняются непрогнозируемо, причем доходности обоих видов акций меняются в одну и ту же сторону. Диверсификация покупки того и другого вида акций бесполезна: доходность портфеля будет столь же случайной, сколь случайна цена нефти.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда доходности некоторых бумаг могут находиться в обратной корреляции. Для понимания сути дела достаточно проанализировать портфель, состоящий всего из двух видов бумаг, то есть $n = 2$. Тогда из (2.5), если взять $\rho_{12} = \rho_{21} = -1$, учитывая, что $\rho_{11} = \rho_{22} = 1$, имеем

$$D_p = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2 = (\sigma_1 x_1 - \sigma_2 x_2)^2.$$

Таким образом, если взять доли в пропорциях $x_2 = \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} x_1$, то $D_p = 0$. Итак, мы можем сделать интересный вывод: при наличии ценных бумаг, находящихся в обратной корреляции, возможно такое распределение вложений, что портфельный риск равен нулю.

Контрольные вопросы

Выберите правильный вариант (варианты) ответа

Begin Quiz

1. Отметьте истинное высказывание

- ☐ большему значению ожидаемой доходности от ценной бумаги обычно соответствует и большее значение риска вложения капитала в них,
- ☐ меньшему значению риска вложения в ценные бумаги обычно соответствует большее значение их ожидаемой доходности,
- ☐ меньшему значению ожидаемой доходности от вложения капитала в ценные бумаги обычно соответствует большее значение риска.

2. Структура портфеля ценных бумаг это

- ☐ перечень видов ценных бумаг, входящих в состав портфеля,
- ☐ вектор, компоненты которого выражают доли вложения капитала в разные ценные бумаги, составляющих портфель,
- ☐ вектор, компоненты которого выражают суммы денег, потраченных на закупку ценных бумаг разного вида.

3. Операция «короткая продажа» в отношении ценных бумаг конкретного вида это

- ☐ немедленная продажа бумаг этого вида,
- ☐ означает, что их берут в долг, а затем продают на рынке ценных бумаг и используют полученную сумму для покупки ценных бумаг других видов,
- ☐ означает, что бумаги данного вида закупаются инвестором в минимальном количестве.

4. Если структура портфеля ценных рисковых бумаг задается вектором $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, а ожидаемые доходности от соответствующих ценных бумаг вектором $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)^T$, то ожидаемая доходность портфеля m_p выражается формулой

- ☐ $m_p = \sum_{i=1}^{n} m_i^2 x_i^2,$
- ☐ $m_p = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i,$
- ☐ $m_p = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_i m_j x_i x_j,$

☐ $m_p = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i^2.$

5. Если структура портфеля ценных рисковых бумаг задается вектором $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, а V_{ij} — ковариация случайных величин доходностей ценных бумаг i-го и j-го вида, то дисперсия D_p случайной величины доходности портфеля выражается формулой

☐ $D_p = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j$,

☐ $D_p = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} V_{ij} x_i^2 x_j^2$,

☐ $D_p = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j}.$

6. Диверсификация позволяет снижать риск

☐ только, когда случайные величины ценных бумаг ведут себя попарно независимо,

☐ только, когда все случайные величины ценных бумаг находятся в положительной корреляции,

☐ в случаях, когда случайные величины ценных бумаг ведут себя попарно независимо или среди них есть пары, находящиеся в отрицательной корреляции.

7. Если портфель имеет структуру $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, то риск вложения в этот портфель σ_p через риски вложения σ_i в бумаги i-го вида, в случае если они попарно ведут себя независимо, выражается формулой

☐ $\sigma_p = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sigma_i,,$

☐ $\sigma_p = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} (x_i \sigma_i)(x_j \sigma_j),$

☐ $\sigma_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 \right)^{1/2},$

☐ $\sigma_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sigma_i \right)^{1/2}.$

End Quiz

Набрано баллов ______ Correct

3 Оптимизация структуры портфеля рисковых ценных бумаг

3.1 Модельные предположения и постановка задачи

Предположения, при которых будет поставлена задача о формировании портфеля ценных бумаг с точки зрения подхода «доходность – риск», состоят в следующем.

М.1. Инвесторы осуществляют оценку портфелей, основываясь на ожидаемой доходности и риске активов.

М.2. При выборе из двух идентичных во всем, кроме ожидаемой доходности, портфелей инвестор выбирает портфель с большей ожидаемой доходностью.

М.3. При выборе из двух идентичных во всем, кроме риска, портфелей инвестор предпочитает портфель с меньшим риском.

М.4. Характеристики активов и портфеля относятся к одному заданному периоду владения.

М.5. Активы являются бесконечно делимыми, то есть в каждый актив может быть вложена любая доля капитала инвестора.

М.6. Отсутствуют какие-либо технические препятствия в реализации оптимальных инвестиционных стратегий; относительно любого актива возможна операция «короткая продажа»; налоги и издержки, связанные с покупкой и продажей активов, не принимаются во внимание.

Предположения М.1 – М.3 выражают предпочтения инвесторов в рамках подхода «доходность – риск». Предположение М.4 говорит о том, что будет рассматриваться задача на один выделенный период времени. Предположения М.5, М.6 носят технический характер и вводятся для упрощения аналитического решения задачи. При выполнении свойства М.6 рынок часто называется *полным рынком.*

Словесная постановка задачи такова: инвестору требуется выбрать структуру портфеля так, чтобы обеспечить заданное значение ожидаемой доходности m_p, и при этом риск портфеля был бы минимальным. Математическая формализация данной задачи была впервые предложена Г. Марковицем (1951).

Пусть инвестор формирует свой портфель сроком на один период владения из n различных рисковых ценных бумаг. Прогнозные значения ожидаемых доходностей ценных бумаг соответствующего вида задаются вектором $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)^T$. Считаем также, что известна матрица $V = (V_{ij})_{i=\overline{1,n},\, j=\overline{1,n}}$, элементами которой являются ковариации $V_{ij} = M[(R_i - m_i)(R_j - m_j)]$ случайных величин доходностей ценных бумаг i-го и j-го видов. Предполагается далее, что эта матрица является положительно определенной.

Итак, задача заключается в отыскании структуры $x = (x_1, x_2, \ldots \ldots, x_n)^T$ портфеля, которая обеспечила бы достижение заданной ожидаемой доходности портфеля m_p с минимальным риском. С учетом формул (2.1), (2.2) математическая формулировка задачи имеет вид

$$D_p = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j V_{ij} \to \min_x, \tag{3.1}$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1, \quad m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n = m_p. \tag{3.2}$$

Если примем обозначение $I = (1, 1, \ldots, 1)^T \in R^n$, то задачу (3.1) – (3.2) можно переписать в матричной форме:

$$D_p = x^T V x \to \min_x, \tag{3.3}$$

$$I^T x = 1, \quad m^T x = m_p. \tag{3.4}$$

Соотношения (3.3) – (3.4) представляют собой формализованное описание задачи отыскания оптимального, в смысле подхода «доходность – риск», портфеля рисковых ценных бумаг, которая известна как задача Марковица.

Вектор x^*, являющийся решением задачи (3.3) – (3.4), определяет структуру оптимального портфеля среди всех возможных портфелей с ожидаемой доходностью m_p. Заметим, что в рассматриваемом случае некоторые компоненты вектора x^* могут принимать отрицательные значения, что означает рекомендацию инвестору совершить относительно соответствующих активов операцию «короткая продажа».

Множество возможных или достижимых портфелей, в данном случае это множество всех портфелей, удовлетворяющих условиям (3.4).

3.2 Решение задачи оптимизации структуры портфеля

Задача (3.3) представляет собой классическую задачу на условный экстремум с двумя ограничениями типа равенства. Все функции, определяющие постановку задачи, являются непрерывно дифференцируемыми на R^n. Следовательно, для ее решения можно использовать теорему Лагранжа. Функция Лагранжа для данной задачи имеет вид

$$L(x, \lambda) = \lambda_0 x^T V x + \lambda_1 (I^T x - 1) + \lambda_2 (m^T x - m_p). \tag{3.5}$$

Градиенты функций $(I^T x - 1)'_x = I$ и $(m^T x - m_p)'_x = m$ можно считать линейно независимыми, ввиду тривиальности задачи в противном случае. Поэтому множитель λ_0 можно считать равным 1.

Отметим также, что любое нижнее лебегово множество целевой функции $\{x \in R^n : \ x^T V x \leq \alpha\}$, ввиду положительной определенности матрицы V, представляет собой эллипсоид, а значит, является ограниченным замкнутым множеством. Поэтому по теореме Вейерштрасса решение задачи заведомо существует.

Итак, в соответствии с теоремой Лагранжа, если вектор x является решением задачи (3.3) – (3.4), то существуют такие λ_1 и λ_2, что $L'_x(x,\lambda) = o_n$. Учитывая вид (3.5) функции Лагранжа и полагая $\lambda_0 = 1$, получаем

$$L'_x(x,\lambda) = 2Vx + \lambda_1 I + \lambda_2 m = o_n.$$

Отсюда получаем

$$Vx = -\frac{\lambda_1}{2} I - \frac{\lambda_2}{2} m. \tag{3.6}$$

Поскольку положительно определенная матрица V невыраждена, то умножая слева правую и левую части равенства (3.6) на обратную матрицу V^{-1}, имеем

$$x = -\frac{\lambda_1}{2} V^{-1} I - \frac{\lambda_2}{2} V^{-1} m. \tag{3.7}$$

Теперь подставим (3.7) в равенства (3.4):

$$-\frac{\lambda_1}{2} I^T V^{-1} I - \frac{\lambda_2}{2} I^T V^{-1} m = 1, \tag{3.8}$$

$$-\frac{\lambda_1}{2} m^T V^{-1} I - \frac{\lambda_2}{2} m^T V^{-1} m = m_p. \tag{3.9}$$

Решая линейную относительно λ_1 и λ_2 систему уравнений (3.8) – (3.9) и подставляя найденное решение в (3.7), получаем оптимальную структуру портфеля x^* в виде

$$x^* = b + c m_p, \tag{3.10}$$

где b и c — векторы размерности n:

$$b = \frac{1}{d}(a_{22} V^{-1} I - a_{12} V^{-1} m),$$
$$c = \frac{1}{d}(a_{11} V^{-1} m - a_{12} V^{-1} I),$$

а d и a_{ij} — следующие числовые значения:

$$a_{11} = I^T V^{-1} I, \quad a_{12} = I^T V^{-1} m,$$

$$a_{22} = m^T V^{-1} m, \quad d = a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

Портфель ценных бумаг со структурой, определяемой по формуле (3.10), будем называть *оптимальным по Марковицу*. Ему соответствует минимальная дисперсия доходности портфеля, определяемая по формуле

$$\sigma_p^2 = x^{*T} V x^* = m_p^2 c^T V c + 2m_p b^T V c + b^T V b. \qquad (3.11)$$

При невозможности операции «короткая продажа» необходимо наложить дополнительное ограничение на структуру портфеля вида $x_i \geq 0$, $i = \overline{1, n}$. Для решения получаемой задачи используются приближенные численные методы.

3.3 Свойства эффективных портфелей

Портфели, оптимальные в смысле задачи Марковица (3.3) – (3.4), называются *эффективными портфелями рисковых ценных бумаг*, или *оптимальными по Марковицу* портфелями.

Проведем качественный анализ решения задачи Марковица и сформулируем некоторые свойства оптимальных портфелей.

1. В соответствии с (3.10), с увеличением ожидаемой доходности m_p портфеля вклады $x_i^* = b_i + c_i m_p$, $i = \overline{1, n}$ в ценные бумаги изменяются линейно. Здесь b_i и c_i — соответствующие компоненты векторов b и c. Они увеличиваются для более доходных и уменьшаются для менее доходных активов (соответствует значениям $c_i > 0$ и $c_i < 0$).

2. Из (3.11) следует, что риск оптимального портфеля возрастает с ростом ожидаемой доходности. При возможности операции «короткая продажа» достижима сколь угодно высокая доходность при соответственно растущем риске. При невозможности данной операции максимальной доходностью обладает портфель, образованный из актива с максимальной ожидаемой доходностью. Из (3.11) вытекает, что функция $\sigma_p = f_1(m_p)$, выражающая зависимость риска от ожидаемой доходности, является выпуклой, поскольку $f_1''(m_p) > 0$. При этом, если функция $f_2(m_p)$ выражает зависимость риска от ожидаемой доходности при невозможности операции «короткая продажа», то имеет место соотношение $f_2(m_p) \geq f_1(m_p)$.

3. Эффективный портфель с характеристиками

$$x_g^* = \frac{1}{a_{11}} V^{-1} I, \quad m_g = \frac{a_{12}}{a_{11}}, \quad \sigma_g = \frac{1}{a_{11}}$$

называется *глобальным* эффективным портфелем. Ему соответствует минимальное значение риска из всех эффективных портфелей.

4. Эффективные портфели обладают двумя свойствами оптимальности:

1) имеют максимальную доходность среди всех достижимых портфелей с одинаковым риском;

2) имеют минимальный риск среди всех достижимых портфелей с одинаковой доходностью.

Множество всех эффективных портфелей с характеристиками (m_p, σ_p) в системе координат «доходность – риск» описывается кривой, которую называют *фронтом эффективных портфелей* (фронт Марковица), ограничивающей множество всех портфелей, достижимых на множестве n ценных бумаг с характеристиками m и V.

На рис. 1 фронту эффективных портфелей соответствует отрезок кривой *1* от точки G (глобальный эффективный портфель) до точки B и выше. Портфели, лежащие на отрезке кривой от точки G левее, не являются эффективными.

Портфели, лежащие выше (по оси σ_p) кривой *1* от точки G до точки B и выше, образуют множество достижимых портфелей. Точке A на кривой *2* соответствует портфель, образованный целиком из актива с максимальной ожидаемой доходностью.

Таким образом, в результате решения задачи Марковица инвестор получает бесконечное множество эффективных портфелей. Индивидуальные предпочтения инвестора при выборе единственного оптимального в смысле подхода «доходность – риск» могут быть учтены с использованием функции полезности инвестора.

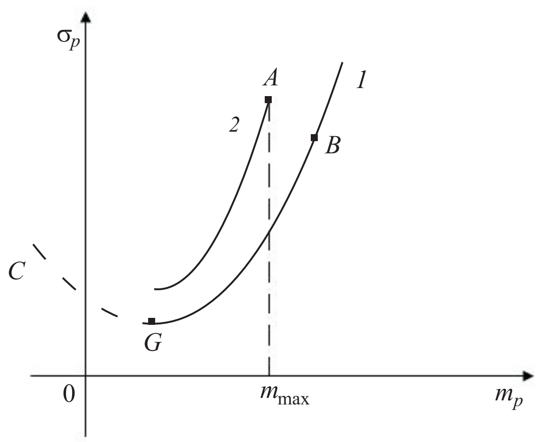

Рис. 1: Зависимость риска эффективного портфеля от ожидаемой доходности при возможности (кривая *1*) и невозможности (кривая *2*)

Контрольные вопросы

Выберите правильный вариант (варианты) ответа

Begin Quiz

1. Какое из перечисленных ниже условий не входит в число исходных предположений при постановке задачи Марковица

   - ☐ характеристики активов и портфеля относятся к одному периоду владения,
   - ☐ активы являются сколь угодно делимыми,
   - ☐ при выборе из двух идентичных во всем, кроме риска, портфелей инвестор предпочитает портфель с меньшим риском,
   - ☐ инвесторы осуществляют оценку активов, основываясь на ожидаемой доходности и риске активов,
   - ☐ запрещается операция «короткая продажа» относительно любого актива.

2. Постановка задачи Марковица заключается в выборе структуры портфеля, которая обеспечивает

   - ☐ заданное значение ожидаемой доходности и минимальное возможное значение риска,
   - ☐ заданное значение риска и максимальное возможное значение ожидаемой доходности,
   - ☐ максимальное возможное значение ожидаемой доходности и минимальное возможное значение риска.

3. Математическая формализация задачи Марковица имеет вид

   - ☐ $$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} x_i x_j V_{ij} \to \max\limits_{x}, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad \sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i = m_p, \end{cases},$$
   - ☐ $$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i \to \max, \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} x_i x_j V_{ij} = D_p\,, \quad \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1, \end{cases},$$
   - ☐ $$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} x_i x_j V_{ij} \to \min\limits_{x}, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad \sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i = m_p. \end{cases}.$$

4. Структура оптимального, по Марковицу, портфеля от ожидаемого значения доходности находится

☐ в линейной зависимости,
☐ в квадратичной зависимости,
☐ в обратной зависимости.

5. Дисперсия оптимального, по Марковицу, портфеля от ожидаемой доходности находится

☐ в линейной зависимости,
☐ в квадратичной зависимости,
☐ в обратной зависимости.

6. Фронт Марковица это

☐ множество всех оптимальных, по Марковицу, портфелей, соответствующих различным значениям ожидаемой доходности,
☐ множество всех достижимых портфелей с заданным значением ожидаемой доходности,
☐ множество всех достижимых портфелей с заданным значением риска.

7. Оптимальный, по Марковицу, портфель A при ожидаемой доходности $m_A = 5$ имеет риск $\sigma_A = 6$. Какие из портфелей являются достижимыми?

☐ портфель B со значениями $m_B = 5$, $\sigma_B = 5$,
☐ портфель C со значениями $m_C = 5$, $\sigma_C = 7$,
☐ портфель D со значениями $m_D = 6$, $\sigma_D = 6$,
☐ портфель F со значениями $m_F = 4$.

End Quiz

Набрано баллов ______ Correct

4 Оптимизация структуры портфеля при возможности безрискового кредитования и заимствования

Задача об оптимальной структуре портфеля в рамках подхода «доходность – риск» приобретает новые качественные особенности, если учесть простой факт: кроме рисковых ценных бумаг на рынке имеются и безрисковые (типа государственных обязательств с фиксированным доходом). Поэтому на практике часто ставится задача о правильном распределении капитала между рисковыми и безрисковыми вложениями.

4.1 Понятие безрискового актива

В рамках подхода Марковица безрисковым считается тот актив, доход по которому за данный период является фиксированным. Это означает, что в момент покупки данного актива в начале рассматриваемого периода владения инвестору точно известна его стоимость в конце периода.

Поскольку доходность такого актива за период владения, определяемая простой ставкой m_0, является фиксированной, то риск актива $\sigma_0 = 0$.

Для выполнения этих условий необходимо, чтобы вложения в безрисковый актив были свободны от таких рисков, как:

- риск невыполнения обязательств (default risk);
- процентный риск (interest rate risk);
- риск реинвестирования (reinvestment-rate risk).

Потенциальным множеством активов, на котором следует искать безрисковый актив, является множество государственных ценных бумаг, риск невыполнения обязательств по которым считается равным нулю. Однако вложения в государственные ценные бумаги не всегда свободны от двух других типов риска. Так, если срок вложения средств в некоторую ценную бумагу, то есть период владения, оказывается меньше срока, оставшегося до ее погашения, то имеет место *процентный риск*. Если же период владения больше срока до погашения, то возникает риск реинвестирования.

И тот, и другой риск обусловлен неопределенностью относительно процентных ставок на финансовом рынке. В первом случае непредсказуемое изменение процентных ставок, которое может произойти за период владения ценной бумагой, порождает неопределенность ее рыночной стоимости в конце периода владения. Во втором случае точно неизвестны ставки, по которым инвестор может реинвестировать свой доход по ценной бумаге по окончании срока ее обращения.

Безрисковым активом, таким образом, может считаться государственная ценная бумага, срок до погашения которой совпадает с периодом владения. Ставка процентов, определяющая доходность безрискового актива, называется *безрисковой ставкой процентов*. Инвестирование в безрисковый актив называется *безрисковым кредитованием*, поскольку покупку государственных ценных бумаг можно рассматривать как предоставление кредита правительству.

Если инвестор не ограничивается собственным капиталом для покупки ценных рисковых бумаг, а имеет возможность взять кредит под безрисковую ставку, то такая операция называется *безрисковым заимствованием*. Обычно предполагается, что процентная ставка по займу равна ставке доходности вложений в безрисковые активы.

В рамках подхода Дж. Тобина задача оптимизации структуры портфеля активов рассматривается при дополнительном предположении о возможности совершения *операций кредитования* и *заимствования* по единой *безрисковой ставке*. В связи с новыми условиями представляют интерес ответы на следующие вопросы:

• как новые возможности диверсификации портфеля отражаются на его характеристиках (доходности и риске)?

• какой должна быть структура рисковой части портфеля, включающего рисковые и безрисковые активы?

• в каких пропорциях следует распределять капитал между рисковой и безрисковой частями портфеля?

4.2 Характеристики и свойства комбинированного портфеля

Пусть инвестор формирует свой портфель как комбинацию из безрискового актива и некоторого заданного портфеля активов, включающего только рисковые ценные бумаги. Будем называть подобные портфели *комбинированными*. Получим формулы для характеристик комбинированного портфеля и отметим ряд его свойств.

Введем обозначения:

m_0 — ставка доходности безрискового актива за один период владения (безрисковая ставка), если бы весь капитал был вложен в данный актив;

x_0 — доля безрисковых вложений ($x_0 \leq 1$) и соответственно $1 - x_0$ — доля рисковых вложений инвестора;

R_r — случайная величина доходности портфеля, составленного только из рисковых активов, если бы весь капитал был вложен в него;

$m_r = M[R_r]$, $D_r = M[(R_r - m_r)^2]$, $\sigma_r = (D_r)^{1/2}$ — соответственно ожидаемая доходность, дисперсия доходности и риск портфеля из рисковых активов, на который приходится доля капитала инвестора равная $1-x_0$. Естественно считать, что

$$m_r > m_0, \quad \sigma_r > 0.$$

Величина $1 - x_0$ характеризует отношение инвестора к риску: чем больше значение $1 - x_0$, тем больше доля рисковых вложений, а значит, и больше склонность инвестора к риску.

Из ограничения $x_0 \leq 1$ следует возможность для инвестора двух противоположных операций с нулевым риском:

- операции кредитования под безрисковую ставку m_0, причем $0 < x_0 \leq 1$;
- операции заимствования по безрисковой ставке m_0, в данном случае $x_0 < 0$.

Характеристики комбинированного портфеля

Выразим формулами характеристики комбинированного портфеля:

- случайная величина доходности портфеля

$$R_p = x_0 m_0 + (1 - x_0) R_r; \tag{4.1}$$

- ожидаемая доходность портфеля

$$m_p = x_0 m_0 + (1 - x_0) m_r; \tag{4.2}$$

- дисперсия доходности портфеля

$$\sigma_p^2 = D(R_p) = (1 - x_0)\sigma_r^2; \tag{4.3}$$

- риск портфеля

$$\sigma_p = (1 - x_0)\sigma_r. \tag{4.4}$$

Проанализируем характеристики портфеля и установим некоторые его свойства.

Из (4.2) следует

$$m_p - m_0 = (1 - x_0)(m_r - m_0), \tag{4.5}$$

где $m_p - m_0$ и $m_r - m_0$ — дополнительная доходность, то есть превышение доходности над доходностью безрискового актива, называемая *премией за риск.*

Имеют место следующие свойства портфеля.

1. Согласно (4.5) премия за риск портфеля активов прямо пропорциональна премии за риск рисковой части портфеля и тем больше, чем больше доля рисковых вложений.

2. Из (4.4) следует, что если инвестор владеет портфелем рисковых активов (рисковым портфелем) с характеристиками (m_r, σ_r) и желает уменьшить риск вложений до некоторой величины $\sigma_p < \sigma_r$, то он должен вложить в безрисковый актив долю своего капитала, равную

$$x_0 = 1 - \frac{\sigma_p}{\sigma_r}. \tag{4.6}$$

Из (4.5) с учетом (4.6) получаем

$$m_p = m_0 + \frac{(m_r - m_0)}{\sigma_r}\sigma_p. \tag{4.7}$$

3. Из (4.7) следует, что ожидаемая доходность m_p и риск портфеля σ_p, полученного путем распределения капитала между безрисковым активов и заданным рисковым портфелем, связаны прямой линейной зависимостью: чем больше риск вложений, тем большую компенсацию в доходности надеется получить инвестор.

Инвестор, распределяющий капитал между безрисковым активом и заданным портфелем рисковых активов, может выбрать одну из следующих стратегий инвестирования (на рис. 2 отмечены портфели активов, соответствующие различным стратегиям):

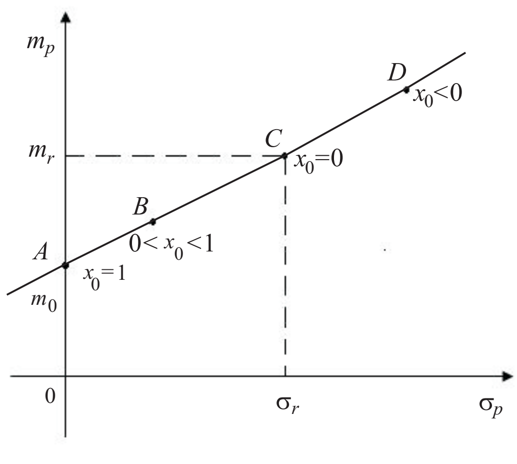

Рис. 2: Множество всех возможных комбинированных портфелей

1) вложить весь капитал в рисковый портфель, не прибегая ни к кредитованию, ни к заимствованию по безрисковой ставке m_0, в этом случае $x_0 = 0$ (портфель C с характеристиками $m_c = m_r$, $\sigma_c = \sigma_r$);

2) инвестировать часть капитала в рисковый портфель, а остаток вложить под безрисковую ставку, в этом случае $0 < x_0 < 1$ (портфель B с характеристиками $m_0 < m_b < m_r$, $0 < \sigma_b < \sigma_r$);

3) вложить весь свой капитал в безрисковый актив, в этом случае $x_0 = 1$ (безрисковый портфель A с доходностью m_0);

4) инвестировать весь капитал плюс дополнительные средства, заимствованные под безрисковую ставку, в рисковый портфель, при этом $x_0 < 0$, а заемные средства составляют долю $|x_0|$ от первоначального капитала инвестора (портфель D с характеристиками $m_d > m_r$, $\sigma_d > \sigma_r$).

Всем перечисленным выше портфелям соответствуют точки, лежащие на одной прямой линии, соответствующей множеству всех возможных при данных условиях портфелей. Уравнение этой прямой имеет вид (4.7).

4.3 Оптимизация структуры комбинированного портфеля

Наряду с модельными предположениями М.1 – М.6 для задачи Марковица из п. 3.1 будем считать, что выполняется также следующее условие:

М.7. Существует безрисковая ставка m_0, по которой инвесторы могут кредитовать и заимствовать произвольную сумму денег.

Как и ранее считаем, что инвестор формирует портфель сроком на один период владения на множестве активов, включающем n рисковых ценных бумаг и один безрисковый актив. Он решает задачу оптимального распределения капитала между всеми этими видами ценных бумаг.

Далее используем обозначения:

x_0 — доля вложения капитала в безрисковый актив;

x_i — доли вложения капитала в соответствующие рисковые активы, $i = \overline{1,n}$;

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ — структура рисковой части комбинированного портфеля;

m_i — ожидаемая доходность i-го рискового актива (если бы весь капитал был вложен только в него);

$m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)^T$ — вектор ожидаемых доходностей;

$V = (V_{ij})_{i=\overline{1,n},\, j=\overline{1,n}}$ — положительно определенная матрица ковариаций случайных величин доходностей рисковых активов.

В целом структура комбинированного портфеля определяется вектором $\tilde{x} = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ и удовлетворяет условию $x_0 + x_1 + \ldots + x_n = 1$ или $x_0 + I^T x = 1$, где $I = (1, 1, \ldots, 1)^T \in R^n$. Ожидаемая доходность такого портфеля есть величина $m_p = m_0 x_0 + m^T x$.

Поскольку доходность безрискового актива — величина фиксированная, то ее дисперсия, а также ковариации с доходностями других активов равны нулю. Поэтому дисперсия доходности комбинированного портфеля определяется только присутствием в портфеле рисковых активов и, как и ранее, вычисляется по формуле

$$D_p = x^T V x.$$

Таким образом, задачу формирования комбинированного портфеля с заданным уровнем ожидаемой доходности m_p и минимальным риском можно записать в виде

$$D_p = x^T V x \to \min_{\tilde{x}}, \tag{4.8}$$

$$x_0 + I^T x = 1, \quad m_0 x_0 + m^T x = m_p. \tag{4.9}$$

Это так называемая задача Дж. Тобина.

Функция Лагранжа, учитывая, что, как и в задаче Марковица, выполняется условие регулярности, имеет вид

$$L(\tilde{x}, \lambda) = x^T V x + \lambda_1 (I^T x + x_0 - 1) + \lambda_2 (m^T x + m_0 x_0 - m_p).$$

По теореме Лагранжа для оптимального вектора структуры $\tilde{x}$ существуют такие числа λ_1 и λ_2, что $L'_x(\tilde{x}, \lambda) = 0$ и $L'_{x_0}(\tilde{x}, \lambda) = 0$. Таким образом, имеем

$$2Vx + \lambda_1 I + \lambda_2 m = o_n, \quad \lambda_1 + \lambda_2 m_0 = 0.$$

Отсюда получаем

$$\lambda_1 = -\lambda_2 m_0, \quad x = \frac{\lambda_2}{2} V^{-1} (m_0 I - m), \tag{4.10}$$

где V^{-1} — обратная матрица к матрице ковариаций V. С другой стороны, исключая x_0 из (4.9), имеем

$$1 - I^T x = \frac{1}{m_0} (m_p - m^T x)$$

или

$$m_p - m_0 = (m - m_0 I)^T x. \tag{4.11}$$

Подставляя (4.10) в (4.11), находим

$$\lambda_2 = \frac{2(m_p - m_0)}{(m - m_0 I)^T V^{-1} (m - m_0 I)}.$$

Теперь, подставляя найденное значение λ_1 в (4.10), получаем вектор x^* оптимальной структуры рисковой части комбинированного портфеля

$$x^* = \frac{(m_p - m_0)V^{-1}(m - m_0 I)}{(m - m_0 I)^T V^{-1}(m - m_0 I)}. \tag{4.12}$$

Матрица V^{-1}, как и матрица V, является положительно определенной. Поэтому число

$$g_p^2 = (m - m_0 I)^T V^{-1}(m - m_0 I)$$

является положительным. Используя это обозначение, формулу оптимальной структуры можно переписать в виде

$$x^* = \frac{(m_p - m_0)}{g_p^2} V^{-1}(m - m_0 I). \tag{4.13}$$

Соответствующая доля x_0^* капитала, приходящаяся на покупку безрискового актива, есть $x_0^* = 1 - I^T x^*$.

Оптимальному комбинированному портфелю со структурой $\tilde{x}^* = (x_0^*, x^*)$, где x^* имеет вид (4.13), соответствует минимальное значение риска

$$\sigma_p^* = (x^{*T} V x^*)^{1/2} =$$
$$= \left[\left(\frac{m_p - m_0}{g_p^2} V^{-1}(m - m_0 I) \right)^T V \left(\frac{m_p - m_0}{g_p^2} V^{-1}(m - m_0 I) \right) \right]^{1/2} =$$
$$= \frac{m_p - m_0}{g_p}.$$

Отсюда вытекает, что характеристика g_p допускает представление

$$g_p = \frac{m_p - m_0}{\sigma_p^*}. \tag{4.14}$$

Это величина ожидаемой дополнительной доходности, приходящаяся на единицу риска на данном рынке ценных бумаг. Соотношение (4.14) можно также переписать в виде

$$m_p - m_0 = g_p \sigma_p^*.$$

Таким образом, чем выше цена риска g_p, тем больше ожидаемая премия за риск, то есть тем выгоднее вложения в портфель.

Характеристика $g_d = (m_d - m_0)/\sigma_d$ известна как отношение Шарпа, или индекс Шарпа. Она используется для оценки привлекательности произвольного рискового актива или портфеля с характеристиками (m_d, σ_d). Очевидно, эта характеристика принимает максимальное значение для эффективных портфелей, то есть $g_d \le g_p$, где g_p определяется формулой (4.14).

4.4 Свойства оптимальных комбинированных портфелей

Перепишем формулу (4.13) в виде

$$x^* = c(m_p)y, \tag{4.15}$$

где

$$c(m_p) = \frac{m_p - m_0}{g_p^2}, \tag{4.16}$$

$$y = V^{-1}(m - m_0 I). \tag{4.17}$$

Скалярный множитель $c(m_p)$ зависит от ожидаемой доходности m_p. Вектор y не зависит ни от m_p, ни от доли x_0^*, которая характеризует отношение инвестора к риску.

Таким образом, пропорции распределения рисковых вложений между собой определяются вектором y и не зависят от ожидаемой доходности m_p и склонности инвестора к риску.

Отсюда вытекают следующие свойства оптимальных портфелей.

1. Все оптимальные портфели (для разных значений m_p), включающие рисковые и безрисковые активы, независимо от склонности инвестора к риску и ожидаемой доходности портфеля, имеют одинаковую внутреннюю структуру рисковой части, то есть они получаются в результате распределения капитала в пропорциях x_0 и $1 - x_0$ между безрисковым активом и одним и тем же рисковым портфелем, структура которого пропорциональна вектору y.

2. Данный рисковый портфель можно рассматривать как частный случай оптимального комбинированного портфеля при значении $x_0 = 0$, то есть при отсутствии безрисковых вложений. Найдем соответствующее распределение долей между рисковыми вложениями (это и есть рисковый портфель). Так как в этом случае $I^T x^* = 1$, то из (4.15) получаем $c(m_p)I^T y = 1$ и, значит, $c(m_p) = 1/I^T y$. Подставляя последнее в (4.15) и используя (4.17), находим искомую структуру рисковых вложений

$$x^* = \frac{1}{I^T y} y = \frac{V^{-1}(m - m_0 I)}{I^T V^{-1}(m - m_0 I)}. \tag{4.18}$$

3. Ожидаемая доходность и риск оптимального комбинированного портфеля при $x_0 = 0$ определяются соотношениями

$$m_p = m_r = m^T x^* = \frac{m^T V^{-1}(m - m_0 I)}{I^T V^{-1}(m - m_0 I)}, \tag{4.19}$$

$$\sigma_p = \sigma_r = (x^{*T} V x^*)^{1/2} = \frac{g_p}{I^T V^{-1}(m - m_0 I)}. \tag{4.20}$$

4. В соответствии с (4.7) множеству всех оптимальных комбинированных портфелей в системе координат (σ_p, m_p) соответствует прямая линия

$$m_p = m_0 + \frac{m_r - m_0}{\sigma_r}\sigma_p, \tag{4.21}$$

где m_r и σ_r определяются формулами (4.19) и (4.20).

5. Оптимальный портфель с характеристиками m_r и σ_r вида (4.19) и (4.20) содержит только рисковые активы и поэтому должен принадлежать множеству оптимальных по Марковицу портфелей. Таким образом, точка с координатами (m_r, σ_r) должна быть общей как для множества оптимальных комбинированных портфелей, так и для фронта эффективных рисковых портфелей. А поскольку структура данного портфеля определяется единственным образом, то данному портфелю соответствует точка касания двух линий (рис. 3).

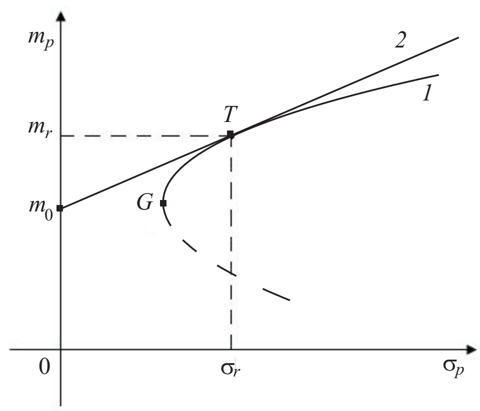

Рис. 3: Множество эффективных портфелей (кривая *1*) и множество оптимальных комбинированных портфелей(кривая *2*)

Портфель в точке касания обычно называется T-портфелем (Tangency portfolio). Его характеристики: $m_T = m_r$, $\sigma_T = \sigma_r$.

Контрольные вопросы

Выберите правильный вариант (варианты) ответа

Begin Quiz

1. От какого вида риска свободны государственные ценные бумаги?

   ☐ риск невыполнения обязательств,
   ☐ процентный риск,
   ☐ риск реинвестирования.

2. Комбинированный портфель это

   ☐ портфель, включающий как рисковые, так и безрисковый активы,

   ☐ портфель, составленный из различных рисковых активов,
   ☐ портфель, составленный из различных безрисковых активов.

3. Премия за риск комбинированного портфеля находится от премии за риск рисковой части портфеля

   ☐ в обратной пропорциональной зависимости,
   ☐ в прямой пропорциональной зависимости,
   ☐ в квадратичной зависимости.

4. Дисперсия случайной величины доходности комбинированного портфеля находится от риска рисковой части портфеля

   ☐ в обратной пропорциональной зависимости,
   ☐ в прямой пропорциональной зависимости,
   ☐ в квадратичной зависимости.

5. Операция «безрисковое заимствование» необходима, если инвестор хотел бы иметь портфель

   ☐ со значением ожидаемой доходности больше, чем любой портфель, составленный целиком из рисковых активов,
   ☐ со значением ожидаемой доходности, которая больше доходности безрискового актива, но менее ожидаемой доходности рисковой части портфеля,
   ☐ минимальным значением риска при значении ожидаемого уровня доходности, соответствующего рисковой части портфеля.

6. Дополнительное модельное предположение задачи Д. Тобина по сравнению с задачей Г. Марковица это

- [ ] запрещение операции «короткая продажа»,
- [ ] существование безрискового актива, относительно которого инвестор может кредитовать и заимствовать любую сумму денег,
- [ ] существование безрискового актива, относительно которого разрешено заимствование, но запрещено кредитование.

7. Постановка задачи Д. Тобина заключается в выборе структуры комбинированного портфеля, которая обеспечивает

- [ ] заданное значение риска и максимальное возможное значение доходности,
- [ ] максимальное возможное значение ожидаемой доходности и минимальное возможное значение риска,
- [ ] заданное значение ожидаемой доходности и минимальное возможное значение риска.

8. Математическая формализация задача Д. Тобина имеет вид

- [ ] $$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} x_i x_j V_{ij} \to \min, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad m_0 x_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i = m_p, \end{cases},$$
- [ ] $$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i \to \max, \\ x_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} x_i x_j V_{ij} = D_p\,, \end{cases},$$
- [ ] $$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} x_i x_j V_{ij} \to \min, \\ x_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad m_0 x_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i = m_p, \end{cases},$$
- [ ] $$\begin{cases} m_0 x_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i \to \max, \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} x_i x_j V_{ij} = D_p\,, \quad \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1. \end{cases}.$$

9. Все оптимальные комбинированные портфели

- [ ] имеют одинаковую внутреннюю структуру рисковой части,
- [ ] различаются по внутренней структуре рисковой части в зависимости от задаваемой ожидаемой доходности,
- [ ] получаются в результате распределения капитала в некоторых пропорциях между безрисковым активом и одним и тем же рисковым портфелем.

10. Множество оптимальных комбинированных портфелей на плоскости «риск – доходность» это

- ☐ некоторая кривая, лежащая выше фронта Марковица,
- ☐ некоторая прямая, лежащая ниже фронта Марковица,
- ☐ некоторая прямая, которая касается фронта Марковица.

End Quiz

Набрано баллов Correct

5 Оценивание характеристик ценных бумаг на основе однофакторной модели

5.1 Проблема оценивания характеристик ценных бумаг

В рамках рассмотренных задач Марковица – Тобина предполагалось, что инвестор формирует оптимальный портфель ценных бумаг на некоторый выделенный период владения, исходя из прогнозных значений ожидаемых доходностей $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)^T$ и ковариационной матрицы $V = (V_{ij})_{i=\overline{1,n},\, j=\overline{1,n}}$ на этот период.

Прогнозные значения данных характеристик строятся на основе имеющихся «исторических» значений доходностей $\{R_{it}\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $t = 1, 2, \ldots, T$ за предшествующие периоды.

В качестве искомых прогнозных значений m и V естественным предполагается использование выборочных оценок вида

$$\tilde{m} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_t, \quad \tilde{V} = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(R_t - \tilde{m})^T(R_t - \tilde{m}), \tag{5.1}$$

$$R_t = (R_{1t}, R_{2t}, \ldots, R_{nt})^T.$$

Однако на практике такой подход, как правило, неприменим вследствие недостаточного объема данных для оценивания всех неизвестных параметров.

Число оцениваемых параметров вектора m и матрицы V с учетом ее симметричности равно $n(n+3)/2$.

Объем выборки M равен nT. Для корректности задачи статистического оценивания параметров необходимо, чтобы объем выборки был больше числа оцениваемых параметров: $M > n(n+3)/2$. Другими словами, формулы (5.1) неприменимы, если число совместно анализируемых активов велико, а объем данных мал, то есть когда $T \leq (n+3)/2$.

Реальные данные таковы. Число ведущих компаний, акции которых котируются на биржах США, примерно 500 ($n \approx 500$, такое число учитывается в популярном издании «Standard and Poor's index»). Пусть для оценивания параметров используются ежеквартальные данные за 25 лет наблюдений, то есть $T = 100$. Таким образом, имеем $nT = 5000$, а оценить нужно $500(500+3)/2 > 125000$ величин. Как видим, прямой статистический подход для оценок ковариаций не подходит.

Для преодоления указанных трудностей используются эконометрические факторные модели регрессионного типа, которые появляются в результате анализа зависимостей курсов и других характеристик ценных бумаг от ведущих факторов финансового рынка. Что же такое ведущий фактор?

Известно, что в экономической жизни все взаимосвязано, но при этом есть факторы, которые влияют практически сразу на все показатели. Например, уровень цен на нефть влияет на котировку почти всех крупных мировых компаний.

В качестве факторов в таких моделях используются обычно макроэкономические показатели и финансовые индексы, оказывающие значимое влияние на курсы всех ценных бумаг.

Примеры: 1) индекс Доу Джонса (Dow Jones Industrial Average) составляется по ценным бумагам 30 крупнейших индустриальных компаний;

2) Standard & Poor' 500 index составляется по ценным бумагам 400 индустриальных, 20 транспортных, 40 коммунальных и 40 финансовых компаний;

3) NYSE Composite index — составной индекс Нью-Йоркской биржи по всем ценным бумагам, которые на ней котируются.

5.2 Модельные предположения однофакторной рыночной модели У. Шарпа

Напомним, что если дано распределение двух случайных величин y_1 и y_2, то *регрессией* y_2 на y_1 называется любая функция $f(y_1)$, приближенно представляющая статистическую зависимость y_2 от y_1. При этом случайная величина y_2 представляется как сумма двух случайных величин

$$y_2 = f(y_1) + h(y_1, y_2),$$

где $h(y_1, y_2)$ рассматривается в качестве поправочного члена (остатка). В частности, если рассматривается линейная регрессия y_2 на y_1, то $f(y_1) = \alpha + \beta y_1$, где α и β подбираются так, чтобы величина

$$\varphi(\alpha, \beta) = M[(y_2 - \alpha - \beta y_1)^2]$$

принимала наименьшее значение, то есть среднеквадратичное отклонение было минимальным.

Итак, предположим что для i-го актива его доходность R_{it} за период t (например, месяц, квартал, год и т.д.) связана с доходностью так называемого *индексного*, или *эталонного*, портфеля R_{It} за тот же период простой линейной регрессии вида

$$R_{it} = \alpha_i + \beta_i R_{It} + \xi_{it}, \quad i = \overline{1,n}, \quad t = 1, 2, \ldots, T \ , \tag{5.2}$$

где $\{\alpha_i, \beta_i\}$ — параметры модели: α_i — свободный член, β_i — коэффициент регрессии.

В качестве доходности индексного портфеля может использоваться темп прироста некоторого рыночного (фондового) индекса.

Относительно случайных отклонений $\{\xi_{it}\}$ доходностей активов от ожидаемых в соответствии с моделью значений будем предполагать выполнение следующих требований.

Предположения Шарпа относительно случайных отклонений ξ_{it}

1. Симметричность: $M[\xi_{it}] = 0$.

2. Взаимная некоррелируемость для различных активов и различных моментов времени

$$\mathrm{Cov}\,(\xi_{it}, \xi_{j\tau}) = M[\xi_{it}\xi_{j\tau}] = \psi_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad t \neq \tau.$$

3. Постоянство дисперсий

$$D[\xi_{it}] = \psi_i^2 = \mathrm{const}, \quad t = 1, 2, \ldots, T.$$

4. Взаимная некоррелируемость ξ_{it} и R_{It}:

$$\mathrm{Cov}\,(\xi_{it}, R_{It}) = 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad t = 1, 2, \ldots, T.$$

При таких предположениях модель (5.2) названа У. Шарпом *рыночной моделью*. Она не имеет строгого экономического обоснования и не требует каких-либо дополнительных предположений относительно рынка и поведения его участников.

5.3 Вычисление характеристик ценных бумаг

Пусть далее m_I — ожидаемая доходность индексного портфеля, $D_I = \sigma_I^2$ — дисперсия случайной величины его доходности.

Прежде всего отметим, что в соответствии с моделью (5.2) и предположением 1:

$$m_i = \alpha_i + \beta_i m_I. \tag{5.3}$$

Далее, используя (5.2) и (5.3), а также предположения 1 – 4 имеем

$$V_{Ii} = \mathrm{Cov}\,(R_{it}, R_{It}) = M[(R_{it} - m_i)(R_{It} - m_I)] =$$

$$= \beta_i M[(R_{It} - m_I)(R_{It} - m_I)] + M[\xi_{it}(R_{It} - m_I)] =$$
$$= \beta_i D_I + \mathrm{Cov}\,(\xi_{it}, R_{It}) = \beta_i \sigma_I^2.$$

Отсюда получаем

$$\beta_i = \frac{V_{Ii}}{\sigma_I^2}. \tag{5.4}$$

Теперь проведем сам процесс вычисления характеристик.

1. Сначала получаем статистические (прогнозные) значения

$$\tilde{m}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_{it}, \quad \tilde{m}_I = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_{It}. \tag{5.5}$$

Используя оценки (5.5), можем получить соответствующие оценки для $\tilde{\sigma}_I$ и $\tilde{V}_{Ii}$:

$$\tilde{\sigma}_I^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(R_{It} - \tilde{m}_I)^2, \tag{5.6}$$

$$\tilde{V}_{Ii} = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(R_{it} - \tilde{m}_i)(R_{It} - \tilde{m}_I). \tag{5.7}$$

2. Далее, используя (5.6) и (5.7), в соответствии с (5.4) получаем оценку для коэффициентов регрессии

$$\tilde{\beta}_i = \frac{\tilde{V}_{Ii}}{\tilde{\sigma}_I^2}. \tag{5.8}$$

А поскольку в силу (5.3) $\alpha_i = m_i - \beta_i m_I$, то можем получить статистические оценки и для α_i:

$$\tilde{\alpha}_i = \tilde{m}_i - \tilde{\beta}_i \tilde{m}_I. \tag{5.9}$$

3. Теперь, используя (5.8) и (5.9), получаем статистические оценки для ψ_i^2 — дисперсии случайной величины ξ_{it}:

$$\tilde{\psi}_i^2 = \frac{1}{T-2}\sum_{t=1}^{T}(R_{it} - \tilde{\alpha}_i - \tilde{\beta}_i R_{It})^2. \tag{5.10}$$

Таким образом, для модели (5.2) с предположениями 1–4 имеем представления

$$m_i = \alpha_i + \beta_i m_I, \tag{5.11}$$

$$\sigma_i^2 = M[(R_{it} - m_i)(R_{it} - m_i)] = \beta_i^2 \sigma_I^2 + \psi_i^2, \tag{5.12}$$

$$V_{ij} = M[(R_{it} - m_i)(R_{jt} - m_j)] = \beta_i \beta_j \sigma_I^2, \quad i \neq j. \tag{5.13}$$

Подставляя в формулы (5.11) – (5.13) вместо неизвестных истинных значений параметров их оценки (5.5) – (5.10), мы получаем оценки соответствующих характеристик активов, которые необходимы для задачи оптимизации структуры портфеля ценных бумаг.

Важно отметить, что при использовании модели (5.2) число статистически оцениваемых параметров равно $3n + 2$. Это параметры m_i, V_{Ii}, ψ_i^2 для $i = \overline{1, n}$, а также m_I и σ_I^2. Остальные параметры вычисляются через полученные оценки по формулам, что вполне сравнимо с объемом выборки $T \cdot n$. Напомним, что при непосредственном оценивании вектора доходностей m и ковариационной матрицы V число оцениваемых параметров равно $n(n + 3)/2$, то есть на порядок больше.

Таким образом, при наличии адекватной факторной эконометрической модели задача статистического оценивания характеристик активов m и матрицы ковариации V становится вполне разрешимой.

5.4 Бета-коэффициенты рисковых ценных бумаг

Коэффициенты регрессии $\{\beta_i\}$, $i = \overline{1, n}$, в формуле (5.3), характеризуют чувствительность доходностей активов к изменениям доходности индексного портфеля. Их называют *бета-коэффициентами* активов. От знака и величины β_i зависят направление и скорость изменения доходности актива при изменении доходности индексного портфеля. В частности, если предположить, что случайные величины R_{it} и R_{It} положительно коррелируют друг с другом, то возможны варианты:

1) $\beta_i = 1$, означающий, что доходность актива изменяется (растет или убывает) с той же скоростью, с какой изменяется доходность индексного портфеля.

2) $\beta_i > 1$, тогда доходность актива изменяется быстрее, а если $\beta_i < 1$, то медленнее доходности индексного портфеля.

Поставим следующий вопрос: каковы будут бета-коэффициенты $\{\beta_i\}$, если предположить, что индексный портфель является эффективным портфелем рисковых ценных бумаг при возможности операций кредитования и заимствования по безрисковой ставке m_0? Напомним, что эффективный портфель имеет (см. (4.13)) структуру

$$x^* = \frac{(m_p - m_0)}{g_p^2} V^{-1}(m - m_0 I). \tag{5.14}$$

В этом случае доходность и ожидаемая доходность комбинированного портфеля вычисляется по формулам

$$R_p = m_0 x_0 + R^T x^*, \quad m_p = m_0 x_0 + m^T x^*, \tag{5.15}$$

где x_0 — доля безрисковых вложений, $R = (R_1, R_2, \ldots, R_n)^T$ — вектор доходностей активов, $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)^T$ — вектор ожидаемых доходностей активов.

Риск портфеля при этом определяется формулой

$$\sigma_p = (x^{*T} V x^*)^{1/2} = \frac{m_p - m_0}{g_p}, \tag{5.16}$$

где

$$g_p^2 = (m - m_0 I)^T V^{-1} (m - m_0 I) > 0,$$

а ковариации доходностей активов с доходностью портфеля активов равны

$$V_{pi} = \mathrm{Cov}\,(R_i, R_p) = M[(R_i - m_i)(R - m)^T x^*]. \tag{5.17}$$

С учетом приведенных соотношений из (5.17) получаем представление для вектора бета-коэффициентов n рисковых активов (см. (5.4)):

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)^T = \frac{1}{\sigma_p^2} M[(R - m)^T (R - m) x^*] =$$
$$= \frac{1}{\sigma_p^2} V x^* = \frac{m - m_0 I}{m_p - m_0}.$$

Таким образом, бета-коэффициент i-го актива определяется по формуле

$$\beta_i = \frac{m_i - m_0}{m_p - m_0}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{5.18}$$

Согласно (5.18) для безрискового актива $\beta_i = 0$, для рискового актива $\beta_i > 0$, а «бета» самого портфеля, естественно, равна единице.

Соотношение (5.15) можно переписать в виде

$$m_i - m_0 = \beta_i (m_p - m_0), \tag{5.19}$$

то есть «бета» актива служит коэффициентом пропорциональности, связывающим премию за риск портфеля рисковых активов и премию за риск отдельного актива из данного портфеля.

5.5 Анализ риска портфеля ценных бумаг

В соответствии с (5.12) дисперсию доходности ценных бумаг можно рассматривать как меру *общего риска* ценной бумаги, состоящего из двух слагаемых

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_I^2 + \psi_i^2 = S_1 + S_2. \tag{5.20}$$

Здесь S_1 — систематический, или рыночный, риск, связанный с неопределенностью относительно состояния рынка, определяемого доходностью индексного портфеля; S_2 — несистематический, или собственный, риск, обусловленный действием неконтролируемых факторов, уникальных для каждого актива.

В соответствии с (5.20) чем больше «бета» ценной бумаги, тем больше ее рыночный риск. Однако, напомним, большим значениям «бета» соответствует (см. (5.19)) и большая премия за риск, то есть рыночный риск имеет соответствующую компенсацию. В то же время собственный риск не имеет подобной компенсации.

Найдем представление для общего риска портфеля из n ценных бумаг, доходности которых описываются рыночной моделью (5.2), а структура задается долями $\{x_i\}$.

Доходность портфеля за рассматриваемый период владения t есть

$$R_{pt} = \sum_{i=1}^{n} R_{it} x_i, \tag{5.21}$$

или с учетом (5.2)

$$R_{pt} = \alpha_p + \beta_p R_{It} + \xi_{pt}, \tag{5.22}$$

где α_p, β_p и ξ_{pt} — средневзвешенные значения соответствующих величин

$$\alpha_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i, \quad \beta_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_i, \quad \xi_{pt} = \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_{it}. \tag{5.23}$$

Вычисляя дисперсию случайных величин в (5.22), находим

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_I^2 + \psi_p^2, \tag{5.24}$$

где $\psi_p^2 = D[\xi_p]$. Таким образом, риск портфеля также состоит из систематического риска $\beta_p^2 \sigma_I^2$ и несистематического риска ψ_p^2 портфеля ценных бумаг.

Если отклонения фактических доходностей активов от ожидаемых в соответствии с рыночной моделью объясняются для каждого актива уникальным набором собственных факторов, то случайные величины $\{\xi_{it}\}$ можно считать взаимно некоррелированными, то есть $\operatorname{Cov}(\xi_{it}, \xi_{jt}) = 0$, $i \neq j$. В этом случае слагаемое ψ_p^2 в (5.24) риска портфеля может быть сделано сколь угодно малым за счет диверсификации портфеля.

В самом деле, полагая для простоты $x = 1/n$, получаем при $n \to \infty$:

$$\psi_p^2 = D\left[\sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i\right] = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \psi_i^2 \leq \frac{\psi_{\max}^2}{n} \to 0, \quad \psi_{\max}^2 = \max_{i=\overline{1,n}} \psi_i^2 < \infty.$$

На этом основании слагаемое ψ_p^2 в формуле (5.24) риска портфеля называют *несистематическим риском.* Как видно из рис. 4, диверсификация портфеля не позволяет исключить систематический риск, равный $\beta_p^2\sigma_I^2$. Однако его можно уменьшить за счет целенаправленного включения в портфель ценных бумаг с малыми значениями «бета» при соответствующей потере в ожидаемой доходности портфеля.

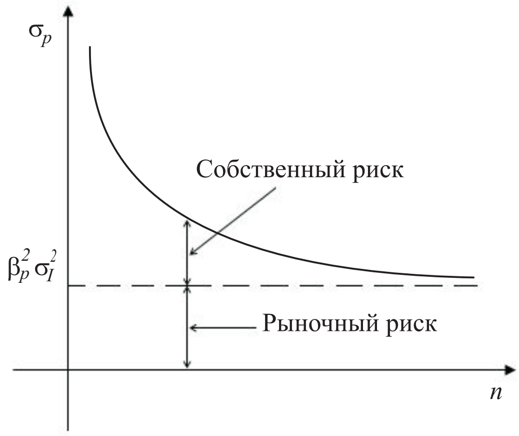

Рис. 4: Эффект диверсификации портфеля ценных бумаг

Контрольные вопросы

Выберите правильный вариант (варианты) ответа

Begin Quiz

1. Недостаток статистического подхода к оценке прогнозных значений характеристик ценных бумаг обычно состоит

- ☐ в недостаточном объеме данных для оценивания параметров,
- ☐ в неточном знании статистических («исторических») значений оцениваемых характеристик,
- ☐ в том,что объем выборки для статистики меньше числа оцениваемых параметров.

2. Если бета-коэффициент актива в модели Шарпа равен единице, то по сравнению с доходностью индексного портфеля доходность актива изменяется

- ☐ с той же скоростью,
- ☐ с меньшей скоростью,
- ☐ с большей скоростью.

3. В однофакторной модели Шарпа ожидаемая доходность актива связана с доходностью индексного портфеля через бета-коэффициент

- ☐ линейной зависимостью,
- ☐ обратной пропорциональной зависимостью,
- ☐ квадратичной зависимостью.

4. «Бета» актива является коэффициентом, связывающим премию за риск актива с премией за риск портфеля

- ☐ в прямой пропорциональности,
- ☐ в обратной пропорциональности,
- ☐ в квадратичной зависимости.

5. Систематический риск портфеля ценных бумаг

- ☐ нельзя полностью исключить за счет диверсификации,
- ☐ можно практически полностью исключить за счет диверсификации,
- ☐ можно только уменьшить за счет включения ценных бумаг с малыми значениями «бета».

End Quiz

Набрано баллов Correct

6 Модель оценивания финансовых активов CAPM

Одна из ключевых проблем оптимального портфельного инвестирования — построение адекватных эконометрических моделей цен и доходностей активов. В предыдущей главе был дан простейший пример такой модели — однофакторная «рыночная» модель — модель простой линейной регрессии.

В теории и практике финансового анализа рынка ценных бумаг большое распространение получили регрессионные модели доходностей активов, предполагающие, что рынок того или иного актива или группы активов находится в состоянии *равновесия*. Это предполагает, что цены активов достигают своих «истинных» значений, уравновешивающих спрос и предположение соответствующих активов.

К моделям такого типа, в основе которых лежат экономические модели равновесия, относится модель оценивания финансовых активов CAPM (Capital Asset Pricing Model).

Ясно, что использованию таких моделей должна предшествовать проверка условий равновесия рынка. Но данного вопроса мы касаться не будем.

6.1 Модельные предположения и свойства CAPM

Модель CAPM может рассматриваться как дальнейшее развитие теории оптимального портфельного инвестирования Марковица – Тобина в рамках подхода «доходность – риск» в ее макроэкономическом аспекте.

Разработка стандартной версии CAPM принадлежит трем авторам: У. Шарпу, Дж. Линтнеру и Дж. Моссину.

Далее по умолчанию будем предполагать, что речь идет о стандартной модели CAPM.

Модельные предположения

Поскольку CAPM основывается на теории Марковица – Тобина, то модельные предположения включают в себя предположения M.1 – M.7 из глав 3 и 4.

Кроме того, вводятся дополнительные предположения относительно использования участниками рынка доступной и относящейся к делу информации.

M.8. Информация в одинаковой степени доступна всем участникам рынка, которые идентично ее интерпретируют и мгновенно используют для принятия или корректировки решений.

M.9. Инвесторы имеют однородные ожидания: поступают рационально, придерживаясь однородных целевых установок и стратегий поведения, а следовательно, имеют одинаковые прогнозы относительно ожидаемой доходности и риска ценных бумаг.

При выполнении предположений M.8 – M.9 в рамках теории оптимального портфельного инвестирования рынок принято называть *совершенным рынком.* Это предполагает, что рациональное поведение участников рынка, имеющих равные возможности, идентичные целевые установки и однородные ожидания, приводит к такому механизму формирования цен активов на рынке, при котором цены *мгновенно, полностью и корректно ассимилируют всю доступную информацию, достигают при этом равновесных значений.*

Свойства модели CAPM

На совершенном (эффективном) рынке все инвесторы, поступая рационально, стремятся сформировать свои портфели активов оптимальным для себя в смысле баланса «доходность – риск» образом, используя одни и те же прогнозные значения характеристик активов (вектора ожидаемых доходностей $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)^T$ и ковариационной матрицы V).

По этой причине множество эффективных по Марковицу портфелей для всех инвесторов в равновесном состоянии рынка будет одним и тем же. То есть все инвесторы имеют одну и ту же кривую фронта эффективных по Марковицу портфелей.

Следовательно, как зафиксировано в п. 4.4 (свойство 1) распределение капитала между эффективным рисковым портфелем и безрисковым активом с доходностью m_0 приведет к однозначному определению оптимальной структуры рискового портфеля (то есть к выбору T-портфеля).

Индивидуальные предпочтения относительно риска и ожидаемой доходности портфеля инвесторы могут учесть за счет выбора доли x_0 безрисковых вложений. При этом множество оптимальных комбинированных портфелей будет общим для всех инвесторов. В системе координат (m_p, σ_p) данному множеству будет соответствовать прямая, касательная к фронту эффективных рисковых портфелей, проходящая через точки $(m_0, 0)$ и (m_T, σ_T), соответствующие безрисковому активу и T-портфелю. Уравнение данной прямой имеет вид (сравните с (4.21)):

$$m_p = m_0 + \frac{m_T - m_0}{\sigma_T}\sigma_p \ . \tag{6.1}$$

Связь в формуле (6.1) позволяет сформулировать первое свойство CAPM, известное как *теорема о разделении.*

Свойство 1. Оптимальный портфель рисковых ценных бумаг для всех инвесторов имеет одинаковую структуру (T-портфель), которая не зависит от предпочтений инвестора относительно риска и ожидаемой доходности. Следовательно, определение оптимальной структуры портфеля ценных рисковых бумаг и учет индивидуальных предпочтений относительно баланса «доходность – риск» могут осуществляться *раздельно* (последовательно).

В модели CAPM ключевым является понятие *рыночного портфеля* (market portfolio).

Рыночный портфель — совокупность всех рисковых ценных бумаг, обращающихся на рынке. Будем называть его *M-портфелем.* Его структуру обозначим вектором $x_M = (x_{M1}, x_{M2}, \ldots, x_{Mn})^T$, где x_{Mi} — доля совокупного рыночного капитала, приходящаяся на ценные рисковые бумаги i-го вида. Для ожидаемой доходности и риска M-портфеля будем использовать обозначения (m_M, σ_M).

Поскольку в состоянии равновесия все инвесторы имеют одинаковый по структуре портфель ценных рисковых бумаг, совпадающий с T-портфелем, то таким же образом устроен и M-портфель, то есть $x_M = x_T$, $m_M = m_T$ и $\sigma_M = \sigma_T$. Таким образом, множество всех эффективных портфелей инвесторов содержит только портфели, получающиеся в результате распределения капитала между безрисковым активом и M-портфелем.

Прямая линия (рис. 5), соответствующая множеству эффективных портфелей, представляющих собой комбинацию из M-портфеля и безрискового актива, определяется *основным уравнением CAPM:*

$$m_p = m_0 + \frac{m_M - m_0}{\sigma_M}\sigma_p \tag{6.2}$$

и называется *рыночной линией.*

Множество всех возможных, но неэффективных портфелей, включая отдельные активы, располагается ниже рыночной линии.

Безрисковая ставка интерпретируется как плата за ожидание (воздержание от риска). Величина $(m_M - m_0)/\sigma_M$ известна как *премия за единицу риска*, или *рыночная цена риска.*

Второе свойство касается рыночного портфеля.

Свойство 2. В состоянии равновесия рынка каждый рисковый актив имеет ненулевую долю в рыночном портфеле, то есть

$$x_{Mi} > 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad x_{M1} + x_{M2} + \ldots + x_{Mn} = 1. \tag{6.3}$$

Действительно, если предположить, что для некоторого актива $x_{Mi} \to 0$, то есть все инвесторы начнут продавать данный актив, что

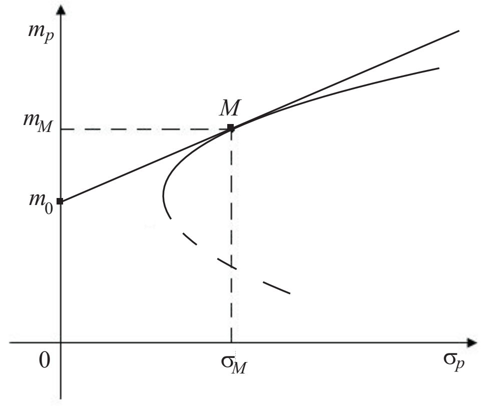

Рис. 5: Геометрическая интерпретация CAPM: прямая — множество эффективных портфелей, ниже прямой — множество достижимых, но неэффективных портфелей

приведет к росту предложения актива на рынке. В свою очередь, это приведет к снижению цены и повышению ожидаемой доходности, что сделает актив вновь привлекательным для покупки. Инвесторы вновь начнут приобретать данный актив, что сделает невозможным достижение условия $x_{Mi} = 0$.

Невозможна также ситуация $x_{Mi} < 0$, то есть равновесный рыночный портфель формируется без использования операции «короткая продажа». Это следует из того, что в состоянии равновесия на рынке устанавливаются «истинные» цены и, таким образом, отсутствуют как недооцененные, так и переоцененные активы, что делает нецелесообразным операцию «короткая продажа».

6.2 CAPM для отдельных ценных бумаг

Получим формулы, определяющие CAPM для отдельной ценной бумаги, используя найденные в п. 5.4 представления для бета-коэффициентов активов по отношению к оптимальному портфелю рисковых ценных бумаг.

Предположим, что на рынке имеется n рисковых ценных бумаг со случайными доходностями $\{R_i\}$, ожидаемыми доходностями $\{m_i\}$, среднеквадратичными отклонениями доходностей $\{\sigma_i\}$ и ковариациями доходностей $\{\sigma_{ij}\}$, определяемыми по формулам

$$m_i = M[R_i], \quad \sigma_i = \sqrt{D[R_i]} > 0,$$

$$V_{ij} = \mathrm{Cov}\,(R_i, R_j) = M[(R_i - m_i)(R_j - m_j)], \quad i, j = \overline{1, n}\ .$$

Также обозначим через $R = (R_1, R_2, \ldots, R_n)^T$ — вектор доходностей имеющихся на рынке ценных бумаг, $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)^T$ — соответствующий вектор ожидаемых доходностей, $V = \{V_{ij}\} = M[(R-m)^T \times (R-m)]$ — ковариационную матрицу доходностей ценных бумаг.

Если рынок находится в равновесии, то в соответствии с CAPM рыночный портфель является оптимальным рисковым M-портфелем с характеристиками x_m, m_m, σ_M. Доходность и ожидаемая доходность M-портфеля имеют вид

$$R_M = R^T x_M, \quad m_M = m^T x_M,$$

а отклонение фактической случайной величины доходности от ожидаемой —

$$R_m - m_M = (R - m)^T x_m = \sum_{i=1}^{n} (R_i - m_i) x_{Mi}.$$

Тогда ковариация доходности i-го актива с доходностью рыночного портфеля будет равна

$$V_{Mi} = \mathrm{Cov}\,(R_i, R_M) = M[(R_i - m_i)(R_M - m_M)] =$$

$$= M[(R_i - m_i)(R - m)^T x_M] = \sum_{j=1}^{n} x_{Mj} M[(R_i - m_i)(R_j - m_j)] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_{Mi} V_{ij}. \tag{6.4}$$

Считаем, что случайные величины R_i и R_M связаны линейной регрессией как в однофакторной рыночной модели У. Шарпа (см. (5.2)):

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + \xi_i. \tag{6.5}$$

Тогда из предположений 1 – 4 этой модели следует, что бета-коэффициенты рисковых ценных бумаг $\{\beta_i\}$ по отношению к M-портфелю имеют вид (см. (5.4))

$$\beta_i = \frac{\mathrm{Cov}\,(R_i, R_M)}{D[R_M]} = \frac{V_{Mi}}{\sigma_M^2}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{6.6}$$

С другой стороны, M-портфель является оптимальным портфелем рисковых ценных бумаг. Поэтому, как и в п. 5.4 (см. (5.18)), коэффициенты $\{\beta_i\}$ выражаются как

$$\beta_i = \frac{m_i - m_0}{m_M - m_0}, \quad i = \overline{1, n}\ .$$

Отсюда следует представление

$$m_i = m_0 + \beta_i(m_M - m_0), \quad i = \overline{1,n}. \tag{6.7}$$

Формула (6.7) устанавливает связь между ожидаемой доходностью ценной бумаги и ее бета-коэффициентом.

В силу (6.6) можно переписать (6.7) в виде

$$m_i = m_0 + \frac{V_{Mi}}{\sigma_M^2}(m_M - m_0), \quad i = \overline{1,n}. \tag{6.8}$$

Соотношения (6.7) и (6.8) — две формы записи уравнения прямой, известной как *рыночная линия ценной бумаги* (рис. 6). Они интерпретируются так: вкладывая капитал в активы с большими значениями V_{Mi} или β_i, инвесторы ожидают получить соответствующую компенсацию в доходности (премию за риск).

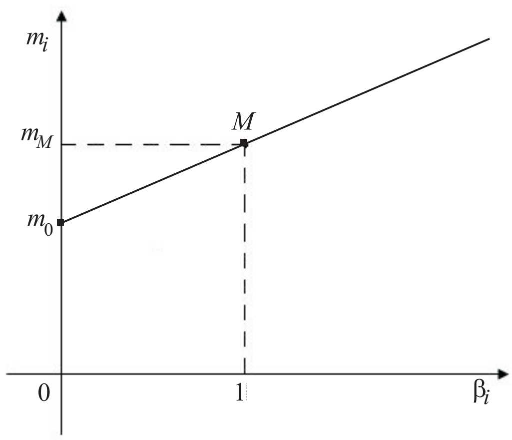

Рис. 6: Множество эффективных портфелей (Рыночная линия ценной бумаги

Бета-коэффициент рыночного портфеля, очевидно, равен единице: $\beta_M = 1$. «Бета» произвольного рискового актива принимает положительные значения, поскольку считается, что $m_i > m_0$ и $m_M > m_0$.

Анализ ценных бумаг на основе «альфа» и «бета»

Соотношения (6.7) – (6.8) позволяют оценить доходность ценной бумаги по известным значениям β_i и V_{Mi}. В качестве альтернативы при этом выступает рыночный портфель.

Возможны следующие случаи:

1) $\beta_i = 1$, $V_{Mi} = \sigma_M^2$, $i = \overline{1, n}$, тогда $m_i = m_M$ (ожидаемая доходность i-го актива находится на уровне средней рыночной доходности);

2) $0 < \beta_i < 1$, $0 < V_{Mi} < \sigma_M^2$, $i = \overline{1, n}$, тогда $m_i < m_M$ (такие активы (акции) считаются менее доходными, но обладают меньшим риском, их принято называть *оборонительными* (defensive stocks));

3) $\beta_i > 1$, $V_{Mi} > \sigma_M^2$, $i = \overline{1, n}$, тогда $m_i > m_M$ (имеет место обратная ситуация: по акциям ожидается более высокая доходность при соответственно большем риске, их называют *агрессивными* (aggressive stocks));

4) $\beta_i = 0$, $V_{Mi} = 0$, $i = \overline{1, n}$, тогда $m_i = m_0$ (безрисковый актив).

Для i-го актива, имеющего неравновесную цену в начале некоторого периода владения t, фактическая доходность m'_{it} за рассматривыаемый период будет отличаться от доходности m_{it}, ожидаемой в соответствии с моделью CAPM в начале периода, на величину

$$\alpha_i = m'_{it} - m_{it} = m'_{it} - (m_0 + \beta_i(m_M - m_0)). \tag{6.9}$$

Возможны случаи:

1) $\alpha_i > 0$, то есть ценная бумага в начале периода недооценена рынком, поэтому представляет привлекательный объект для покупки;

2) $\alpha_i < 0$, то есть ценная бумага в начале периода переоценена рынком, поэтому ее не следует покупать, а целесообразно продать, либо совершить операцию «короткая продажа»;

3) $\alpha_i = 0$, то есть ценная бумага в начале периода имела равновесную («истинную») цену, поэтому в данном периоде отсутствует возможность получить дополнительный доход за счет ее покупки или продажи.

Таким образом, при оценке актива для неравновесного рынка можно использовать модификацию CAPM

$$m_i = m_0 + \alpha_i + \beta_i(m_M - m_0).$$

Обычно оценки коэффициентов α_i и β_i для различных активов известны из источников финансовой информации и используются участниками рынка для оценки инвестиционной привлекательности ценных бумаг.

6.3 Модификации CAPM

Описанная выше стандартная версия CAPM основана на достаточно жестких предположениях M.8, M.9 — об использовании участниками рынка доступной информации. Однако насколько CAPM соответствует реальным процессам финансового рынка? Для ответа требуется проверка адекватности CAPM по реальным статистическим данным. Проверка условия равновесия рынка сводится к статистической проверке гипотез о значениях параметров используемой регрессионной модели.

В данной главе мы познакомимся с некоторыми модификациями, соответствующими более реалистичным, чем в стандартной версии, предположениям относительно поведения участников рынка ценных бумаг.

Предположение о невозможности операции «короткая продажа»

Предположение о возможности или невозможности операции «короткая продажа» относится к тем, которые в рамках CAPM не влияют в итоге на конечный результат.

Действительно, в соответствии со свойством 2 (см. п. 6.1) равновесный рыночный портфель формируется без использования операции «короткая продажа», поскольку в состоянии равновесия на рынке устанавливаются равновесные, то есть «истинные» цены на активы. По этой причине у инвесторов отсутствуют мотивы для совершения данной операции. Таким образом, одно и то же представление CAPM будет получено как при возможности, так и невозможности операции «короткая продажа».

Модель CAPM по версии Блэка при отсутствии безрискового актива

Одно из предположений модели (M.7) заключается в том, что инвесторы могут кредитовать или брать в долг произвольную сумму денег по безрисковой ставке m_0.

Очевидно, что это предположение противоречит реальной ситуации. Действительно, можно допустить, что инвесторы способны вкладывать любую часть своего капитала под безрисковую ставку (например, покупая государственные краткосрочные облигации со сроком обращения, совпадающим с периодом владения). Однако они не могут заимствовать произвольную сумму денег. Кроме того, если учитывать неопределенность, связанную с будущим уровнем инфляции, то безрискового заимствования вовсе не существует. Поэтому актуальным является распространение CAPM на случай, когда безрискового актива не существует. Такая модификация была предложена Ф. Блэком и основана на понятии портфеля с нулевым «зета».

Итак, в соответствии с CAPM по версии Блэка рыночная линия ценной бумаги описывается соотношением

$$m_i = m_Z + \beta_i(m_M - m_Z), \quad i = \overline{1,n}, \tag{6.10}$$

где m_i и β_i — ожидаемая доходность и «бета» i-го актива по отношению к M-портфелю, $m_Z = M[R_Z]$ — ожидаемая доходность, а R_Z — случайная величина доходности так называемого Z-портфеля, то есть портфеля с нулевым «бета» (zero-beta portfolio) по отношению к «рыночному» M-портфелю с ожидаемой доходностью m_M.

Этот Z-портфель, как и безрисковый актив, имеет нулевое «бета» ($\beta_Z = 0$), что и дает основание использовать его в CAPM вместо несуществующего безрискового актива.

Ключевая проблема при построении CAPM в виде (6.10) состоит в выборе Z- и M-портфелей. Оказывается, в качестве M-портфеля можно использовать любой эффективный по Марковицу рисковый портфель (кроме «глобального» портфеля). А по уже выбранному M-портфелю можно однозначно определить соответствующий ему Z-портфель.

Геометрически такая процедура выглядит на плоскости (m_i, σ_i) следующим образом. Берем произвольный эффективный M-портфель, не совпадающий с «глобальным». Ему соответствует некоторая точка M (рис. 7) кривой фронта эффективных портфелей с координатами (m_M, σ_M). Проведем прямую, касательную к данной кривой в точке M до пересечения с осью ординат в точке A с координатами $(m_A, 0)$. Точка A соответствует некоторому гипотетическому безрисковому активу с ожидаемой доходностью $m_A > 0$.

Точка Z — пересечение вертикали, проведенной из точки M, и горизонтали, проведенной через точку A.

Пусть θ — множество достижимых портфелей, которые располагаются на горизонтали правее точки Z.

Ясно, что любой портфель из θ, включая портфель в точке Z, имеет ожидаемую доходность, равную m_A, и, в частности,

$$m_Z = m_A. \tag{6.11}$$

При сделанных предположениях для произвольного рискового i-го актива (включая портфель в точке Z) на основании CAPM справедливо уравнение, описывающее рыночную линию ценной бумаги,

$$m_i = m_A + \beta_i(m_M - m_A). \tag{6.12}$$

Если в качестве i-го актива рассматривается портфель в точке Z, то из (6.11), (6.12) следует $m_i = m_Z = m_A$, причем $\beta_i = \beta_Z = 0$, поскольку $m_M > m_A$ по построению.

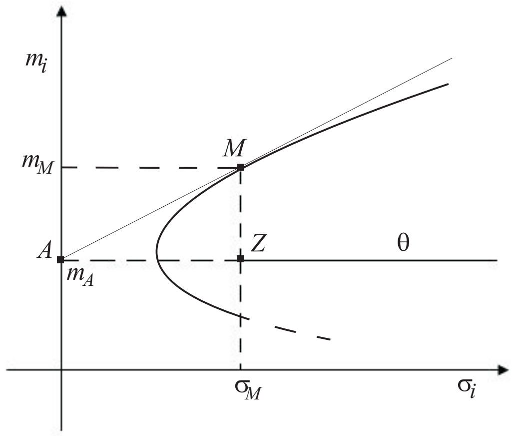

Рис. 7: Множество эффективных портфелей (CAPM при отсутствии безрискового актива

Портфель в точке Z со структурой $x_Z = (x_{Z1}, x_{Z2}, \ldots, x_{Zn})^T$, соответствующий заданному эффективному рисковому M-портфелю, будем называть Z-портфелем.

По построению Z-портфель обладает следующими свойствами.

1. Коэффициент «бета» Z-портфеля равен нулю

$$\beta_Z = \frac{\mathrm{Cov}\,(R_Z, R_m)}{\sigma_M^2} = 0. \tag{6.13}$$

2. На множестве θ достижимых портфелей Z-портфель обладает минимальным риском σ_Z.

3. Ожидаемая доходность Z-портфеля равна

$$m_Z = \sum_{i=1}^{n} m_i x_{zi}. \tag{6.14}$$

4. Z-портфель является неэффективным, поскольку ему соответствует точка, лежащая ниже точки M, соответствующей эффективному по Марковицу рисковому портфелю.

Очевидно, Z-портфель, обладающий перечисленными выше свойствами 1 – 4, и является искомым портфелем с нулевым «бета». Причем первые два свойства Z-портфеля используются для его построения.

Произвол в выборе M-портфеля приводит к бесконечному числу вариантов пар M- и Z-портфелей. Для определения варианта, наиболее приемлемого для конкретного инвестора, обычно используется следующий подход.

Выбор M-портфеля осуществляется на множестве эффективных рисковых портфелей с учетом предпочтений (кривых безразличия) инвестора относительно риска и доходности портфеля. А далее для M-портфеля находится соответствующий ему Z-портфель.

Отыскание M-портфеля с учетом индивидуальных предпочтений инвестора позволяет снять еще одно ограничение стандартной версии CAPM относительно того, что все инвесторы имеют одинаково устроенные рисковые портфели и таким образом получить более реалистическую модель.

Рассмотренная версия модели CAPM обладает еще одним достоинством. Если стандартная модель не учитывает инфляционных изменений цен и доходностей активов, то данная версия может рассматриваться как модель равновесия, скорректированная с учетом инфляции. Предполагается, что в модели используются реальные ставки доходностей активов.

Модель CAPM с учетом различия безрисковых ставок кредитования и заимствования

Стандартная модель CAPM предполагает, что инвесторы могут вкладывать и занимать деньги по одной и той же ставке m_0. Это предположение является обычно далеким от практики. Поэтому заменим предположение M.7 (см. п. 4.3) на более правдоподобное.

M.7*. Инвесторы могут совершать операции *кредитования* под безрисковую ставку m_{0L} (lending — кредитование) и *заимствование* по более высокой ставке m_{0B} (borrowing — заимствование)

$$m_{0L} < m_{0B}. \tag{6.15}$$

Очевидно, ситуация $m_{0L} > m_{0B}$ не имеет смысла.

Инвесторов в зависимости от их стратегии инвестирования можно разделить на три группы:

1-я группа — инвесторы, не занимающиеся безрисковым кредитованием и заимствованием;

2-я группа — инвесторы, осуществляющие безрисковое кредитование;

3-я группа — инвесторы, осуществляющие безрисковое заимствование.

Предположение M.7*, как и предположение об отсутствие безрисковой ставки, приводит к ситуации, когда портфель ценных рисковых бумаг уже не является одинаковым для всех инвесторов. Так, инвесторы

2-й и 3-й групп имеют различные по структуре портфели ценных рисковых бумаг.

В соответствии с первым свойством модели CAPM (п. 6.1) такие портфели, называемые касательными, однозначно определяются на множестве эффективных по Марковицу портфелей при заданной безрисковой ставке. Поэтому различным ставкам m_{0L} и m_{0B} соответствуют различные эффективные рисковые портфели (L-портфель и B-портфель). Геометрически множества эффективных портфелей для различных групп инвесторов можно представить следующим образом:

а) множество всех эффективных комбинированных портфелей для инвесторов 2-й группы включает портфели в виде комбинации из безрискового актива с доходностью m_{0L} и рискового L-портфеля. Данному множеству портфелей соответствует отрезок $[(m_{0L}, 0), L]$ на рис. 8.

б) эффективные портфели для инвесторов 3-й группы формируются при использовании средств, заимствованных по безрисковой ставке m_{0B} и имеют структуру рисковой части портфеля в виде B-портфеля. Данным портфелям соответствует луч $B - B'$

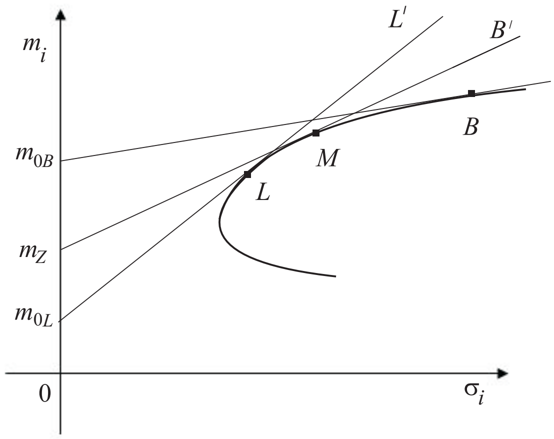

Рис. 8: Различные безрисковые ставки кредитования и заимствования

Множества портфелей, которым соответствует отрезок $[(m_{0B}, 0), B]$ и луч $L - L'$, являются недостижимыми.

в) инвесторам 1-й группы соответствуют различные эффективные рисковые портфели (в зависимости от их индивидуальных предпочтений относительно ожидаемой доходности и риска портфеля), сосредоточенные на куске $L-B$ фронта эффективных портфелей. Куску $L-B$ должна принадлежать и точка, соответствующая рыночному M-портфелю в состоянии равновесия рынка, как средневзвешенному рисковому портфелю на множестве портфелей всех инвесторов.

Инвесторы 1-й группы по заданному M-портфелю могут построить соответствующий Z-портфель (то есть портфель с нулевым «бета») для получения необходимого представления CAPM в виде рыночной линии ценной бумаги. Таким образом, уравнение рыночной линии ценной бумаги для инвесторов 1-й группы имеет вид

$$m_i = m_Z + \beta_i(m_M - m_Z), \quad i = \overline{1, n},$$

где m_i — ожидаемая доходность i-го актива, β_i — «бета» i-го актива по отношению к M-портфелю, m_Z — ожидаемая доходность Z-портфеля, соответствующего данному M-портфелю.

Инвесторам 2-й группы соответствует уравнение

$$m_i = m_{0L} + \beta_{iL}(m_L - m_{0L}), \quad i = \overline{1, n}, \tag{6.16}$$

где m_L — ожидаемая доходность L-портфеля, β_{iL} — «бета» коэффициент i-го актива по отношению к L-портфелю, определяемый по формуле

$$\beta_{iL} = \frac{\mathrm{Cov}\,(R_i, R_L)}{\sigma_L^2}.$$

Для инвесторов 3-й группы имеем

$$m_i = m_{0B} + \beta_{iB}(m_B - m_{0B}), \quad i = \overline{1, n}, \tag{6.17}$$

где m_B — ожидаемая доходность B-портфеля, β_{iB} — «бета» i-го актива по отношению к B-портфелю, определяемый по формуле

$$\beta_{iB} = \frac{\mathrm{Cov}\,(R_i, R_B)}{\sigma_B^2}.$$

Отметим, что для крупных институциональных инвесторов различие в ставках m_{0L} и m_{0B} может быть незначительным на фоне погрешностей в оценивании «бета» активов и ожидаемых доходностей портфелей, участвующих в уравнениях (6.16), (6.17). Поэтому в таких случаях на практике вместо описанной модификации CAPM может использоваться ее стандартная версия.

Контрольные вопросы

Выберите правильный вариант (варианты) ответа

Begin Quiz

1. В модели CAPM

- ☐ у всех инвесторов одинаковая доля капитала приходится на покупку безрискового актива,
- ☐ инвесторы могут различаться по доле вложения капитала в безрисковый актив, а структура рисковой части портфеля одна и та же,
- ☐ множество оптимальных комбинированных портфелей для всех инвесторов одно и то же.

2. Рыночный портфель это

- ☐ совокупность всех ценных бумаг, обращающихся на рынке,
- ☐ совокупность всех только рисковых бумаг, обращающихся на рынке,
- ☐ одновременно оптимальный комбинированный портфель и оптимальный, по Марковицу, портфель при некотором значении ожидаемой доходности.

3. Бета-коэффициент рыночного портфеля

- ☐ равен единице,
- ☐ больше единицы,
- ☐ меньше единицы.

4. Акции называются оборонительными, если значение их бета-коэффициента

- ☐ равно единице,
- ☐ больше единицы,
- ☐ меньше единицы.

5. Z-портфель в модификации модели CAPM при отсутствии безрисковым активом обладает бета-коэффициентом

- ☐ равным единице,
- ☐ большим единицы,
- ☐ меньшим единицы.

6. Обычно ставки кредитования

☐ больше ставки заимствования,
☐ меньше ставки заимствования,
☐ совпадает со ставкой заимствования.

End Quiz

Набрано баллов ______ Correct

Список литературы

1. *Дубров А.М., Лагоша Б.А., Хрусталев Е.Ю.* Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе. – М.: Финансы и статистика, 1999.

2. *Малыхин В.И.* Финансовая математика. – М.: Юнити, 2003.

3. *Малюгин В.И.* Рынок ценных бумаг: Количественные методы анализа. – М.: Дело, 2003.

4. *Первозванский А.А., Первозванская Т.Н.* Финансовый рынок: расчет и риск. – М.: Инфра-М, 1994.

5. *Шарп У.Ф., Александер Г.Дж., Бейли Дж.В.* Инвестиции. – М.: Инфра-М, 1997.

6. *Шаповал А.Б.* Инвестиции: математические методы. – М.: Форум; Инфра-М, 2007.

7. *Крушвиц Л.* Финансирование и инвестиции. Неоклассические основы теории финансов. – СПб.: Питер, 2000.

8. *Уотшем Т.У., Паррамоу К.* Количественные методы в финансах. – М.: Юнити, 1999.