# Финансовые приложения стохастического анализа

А.Л.Лукашов

## Содержание

# Введение

Среди достижений экономической науки, отмеченных в 20 веке Нобелевской премией, можно выделить премию 1997 года, присужденную американским математикам М. Шоулсу и Р. Мертону «за разработку совершенно нового метода определения стоимости опционов», описанного ими и Ф. Блэком в 1973 году. Этот метод продолжает бурно развиваться и в наше время, поэтому для экономической составляющей образования информатика-экономиста знание основ метода представляется насущной необходимостью.

В то же время анализ имеющейся литературы по финансовому менеджменту на русском языке показывает, что метод Блэка-Шоулза-Мертона излагается очень редко, точнее, можно упомянуть лишь книги [5] и [9]. Вызвано это, по-видимому, сложностью математического аппарата, используемого в рамках теории, поэтому пользователи в лучшем случае потребляют готовый продукт (например, формулу Блэка-Шоулза), не пытаясь анализировать адекватность предложенной теории существующим рыночным реалиям.

Исключением может служить книга А.В. Мельникова, С.Н. Волкова и М.Л.Нечаева [5], в которой ключевые и математически весьма сложные результаты современной теории хеджирования и инвестирования изложены на грани математической корректности и предельно строго показано, как эта общая методология преломляется в конкретных моделях финансовых рынков.

Спецкурс «Финансовые приложения стохастического анализа» имеет две основные цели: во-первых, познакомить студентов с формулами расчета стоимостей некоторых опционов, используемых на практике; во-вторых, научить студентов элементам техники, применяемой при выводе не только этих формул, но и их более сложных вариантов. Таким образом, студенты, освоившие курс, могут приступать к изучению и к практическому использованию более сложных курсов, например, уже упоминавшегося курса [5].

Изложение материала наиболее близко к книге М. Стеле [7], не переведенной на русский язык, но содержит ряд существенных отличий. Изменения необходимы прежде всего из-за того, что курс рассчитан на относительно небольшое количество аудиторных часов — 26, поэтому было принято решение весьма урезать изложение теории мартингалов даже по сравнению с уже достаточно кратким описанием из [7]. Кроме того, доказательство формулы Ито использует работу Т. Сабадоша [6], и представляется более естественным, чем соответствующее доказательство в [7] (хотя оно и ущербнее с точки зрения полноты обоснования). Наконец, отсутствие глубоко развитой теории мартингалов, которое не давало возможности на достаточно обоснованном уровне представить мартингальный подход к выводу формулы Блэка-Шоулза и формул расчета цен других опционов, было компенсировано включением вывода (на основе мартингального подхода) дискретной версии формулы Блэка-Шоулза — формулы Кокса-Росса-Рубинштейна из книги А.В. Мельникова [4]. Наконец, для усиления экономической составляющей был включен пункт о выводе формулы для расчета цены русского опциона из книги А.Н. Ширяева [9].

Включено также приложение, содержащее используемые сведения из теории меры и интеграла Лебега и из теории вероятностей. Следует отметить, что теория меры и интеграла Лебега излагается по книге М.И. Дьяченко и академика РАН П.Л. Ульянова — одного из самых знаменитых первых выпускников механико-математического факультета СГУ.

Основная структура курса

Раздел 1. Мартингалы. Дискретное время.

Случайные блуждания: честная и нечестная игра. Время разорения, его ожидание, вероятность разорения. Понятие мартингала в случае дискретного времени, примеры мартингалов, применения к случайным блужданиям. Суть мартингального подхода на примере биномиального (b,S)-рынка. Вывод формулы Кокса-Росса-Рубинштейна для подсчета безарбитражной (рациональной, справедливой, взаимоприемлемой) цены европейского опциона покупателя и формулы паритета цен опционов покупателя и продавца.

Раздел 2. Мартингалы. Непрерывное время.

Понятие броуновского движения, его построение. Свойства траекторий броуновского движения. Понятие мартингала в случае непрерывного времени. Примеры мартингалов и их использования. Локальные мартингалы.

Раздел 3. Стохастические интегралы.

Понятие интеграла Ито для различных классов. Пример явного вычисления интеграла Ито. Основные факты теории стохастического интегрирования. Формулы Ито. Интеграл Ито как (локальный) мартингал. Связь с теорией гармонических функций. Стандартные процессы. Обобщения формулы Ито.

Раздел 4. Формула Блэка-Шоулза и другие приложения мартингального подхода.

Вывод формулы Блэка-Шоулза с помощью решения уравнения теплопроводности. Схема мартингального подхода для вывода формулы Блэка-Шоулза. Невыгодность раннего погашения американского опциона. Оптимальное погашение русского опциона и его цена.

Опишем подробнее содержание пособия.

Первый параграф посвящен случайным блужданиям. На наглядном примере (игры в подбрасывание монеты) иллюстрируются простейшие теоретико-вероятностные методы, позволяющие найти ответы на некоторые вопросы, связанные со случайными блужданиями — вероятности (не)разорения, средняя продолжительность игры, исследование распределения времени достижения некоторого уровня.

Второй параграф содержит некоторые вопросы теории мартингалов для случая дискретного времени. Ввиду недостатка времени были опущены различные неравенства для мартингалов, теоремы о сходимости. Приводятся примеры мартингалов, связанные со случайными блужданиями, доказывается теорема о процессе остановки, которая применяется для ответа на вопросы, изученные в первом параграфе, но для случайных блужданий в случае нечестной игры.

Третий параграф — один из ключевых. В нем достаточно подробно, следуя А.В. Мельникову, изложена схема мартингального подхода для определения рациональной (безарбитражной) цены европейского опциона покупателя в случае дискретного времени. Ведены основные понятия, связанные с моделями биномиального рынка: хеджирование, арбитраж, производные ценные бумаги, дисконтированная цена акции, мартингальные вероятностные меры. Найдена структура плотности мартингальной меры, установлена минимальность хеджа для портфеля, рассчитанного с использованием мартингальной вероятности. Как результат, выведена формула Кокса-Росса-Рубинштейна для подсчета безарбитражной цены европейского опциона покупателя в случае дискретного времени и формула паритета цен опционов покупателя и продавца.

Четвертый параграф посвящен броуновскому движению. Дано определение броуновского движения, доказано его существование с помощью конструкции З. Чисельского, использующей простейшие всплески (вейвлеты) — функции Хаара. Доказывается теорема о плохих гладкостных свойствах траекторий броуновского движения, показывающая, что непрерывные и нигде не дифференцируемые функции, существование которых отмечалось в курсе математического анализа, являются вполне естественным объектом, а не чем-то искусственно созданным.

В пятом параграфе рассмотрены мартингалы для случая непрерывного времени. Поскольку ряд основных положений теории мартингалов был пропущен даже в случае более простого случая — дискретного времени, то здесь приводятся лишь основные определения, даны простейшие примеры мартингалов, для понимания которых достаточно интуитивно понятных свойств условного математического ожидания. Также доказаны некоторые простые утверждения о локальных мартингалах, помогающие получить представление об элементах используемой при работе с ними технике.

Шестой параграф посвящен применениям теории мартингалов к изучению броуновского движения. Здесь приводятся некоторые примеры классических мартингалов, связанных с броуновским движением, которые используются вместе с теоремой Дуба о процессе остановки для изучения времени разорения и времени достижения некоторого уровня для броуновского движения.

Седьмой параграф содержит ряд основных моментов построения теории стохастических интегралов (интегралов Ито). Установлена изометрия Ито для класса функций, интеграл Ито от которых определяется естественным образом, которая является одним из ключевых инструментов в построении теории более общих интегралов Ито. Приводятся (без доказательств) некоторые результаты, позволяющие сблизить понятия стохастического и обычного интегралов. Наконец, достаточно подробно рассмотрен нетривиальный пример явного вычисления интеграла Ито.

В восьмом параграфе собраны различные версии формул Ито, играющих в теории стохастических интегралов роль, аналогичную роли формулы Ньютона-Лейбница в теории обычного интеграла (Римана). Доказательство простейшего варианта изложено весьма подробно (следуя статье Т. Сабадоша). Формула Ито для пространства-времени анализируется с точки зрения получения условия мартингальности, которое применяется для решения ряда задач о вычислении величин, связанных как с обычным броуновским движением, так и с броуновским движением со смещением. Векторный вариант формулы Ито используется для демонстрации существенной разницы в поведении случайного блуждания на плоскости и в пространстве.

Девятый параграф содержит ставший уже классическим вывод формулы Блэка-Шоулза для безарбитражной цены европейского опциона покупателя в случае непрерывного времени на основе использования решения уравнения теплопроводности.

Ко всем параграфам с первого по девятый даны задачи для самостоятельного решения.

Десятый параграф посвящен мартингальному подходу к управлению риском платежных обязательств в случае непрерывного времени. Здесь приведен вывод формулы Блэка-Шоулза на основе использования теории Гирсанова. Сама теория слишком сложна для того, чтобы привести с достаточным обоснованием ее основные положения, но использование апелляции к аналогии с дискретным вариантом позволяет дать вполне логичный вывод. Далее приводится весьма компактное доказательство результата, одна из интерпретаций которого состоит в невыгодности раннего погашения американского опциона. Наконец, следуя книге А.Н. Ширяева, приводится вывод теоремы, описывающей оптимальный момент погашения и цену русского опциона. Поскольку последний параграф опирается на довольно сложную теорию, задачи к нему не приводятся (достаточно разбора приводимых доказательств).

Приложение содержит основные используемые сведения теории меры и интеграла Лебега, а также некоторые сведения из теории вероятностей (теорема Бореля-Кантелли, свойства многомерного нормального распределения и условного математического ожидания), которые редко излагаются в соответствующих курсах.

# 1 Случайные блуждания

Рассмотрим самую простую на свете игру — в подбрасывание монеты. Предположим, что отсутствует плата за участие в игре. Тогда в результате подбрасывания одной монеты игрок выигрывает единицу капитала с вероятностью $p = 1/2$ и проигрывает единицу капитала с вероятностью $q = 1/2$. Тем самым задана случайная величина $X$, причем $P(X = +1) = p = 1/2$; $P(X = -1) = q = 1/2$.

Предполагаем теперь, что игрок последовательно подбрасывает монету несколько (возможно, бесконечно много!) раз. Тем самым задана (возможно, бесконечная) последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, где индекс обозначает порядковый номер подбрасывания (или момент времени).

Тогда наиболее интересующий в каждый момент времени игрока вопрос — каков его капитал, т. е.

$$S_n = S_0 + X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$

где $S_0$ — начальное значение капитала (в наших предположениях $S_0 = 0$). Конечно же, речь о предсказании конкретного значения $S_n$ не идет, но ниже будет достаточно простым способом показано, что некоторые вероятностные характеристики процесса игры могут быть определены достаточно простым образом. При этом будут использоваться лишь минимальные сведения из теории вероятностей и строгость будет иногда заменяться ссылками на интуицию.

Пусть $A$ и $B$ — два натуральных числа. Обозначим через $\tau$ первый момент времени $n$ (если таковой случится), когда $S_n = A$ или $S_n = -B$. Этот момент называется моментом остановки и является случайной величиной со значениями в $\{0, 1, 2, \ldots, \infty\}$.

1. Один из наиболее естественных вопросов — какова вероятность выигрыша (а не проигрыша) игрока, принявшего для себя в качестве критерия выхода из игры достижение уровня $A$ или $-B$, т. е. $P(S_\tau = A)$. Для этого подсчитаем $f(k) = P(S_\tau = A \mid S_0 = k)$, т. е. условную вероятность того, что $S_\tau = A$ при условии, что начальный капитал равен $k$. По формуле полной вероятности, анализ первого шага дает

$$\begin{aligned} f(k) = P(S_\tau = A \mid S_0 = k, X_1 = 1) \cdot P(X_1 = 1) +& \\ + P(S_\tau = A \mid S_0 = k, X_1 = -1) \cdot P(X_1 = -1) &= \\ = \frac{1}{2}\left(P(S_\tau = A \mid S_1 = k+1) + P(S_\tau = A \mid S_1 = k-1)\right). & \quad (1) \end{aligned}$$

Поскольку все случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ независимы, то выигрыш $A$ единиц (а не проигрыш $B$ единиц) при наличии капитала $(k+1)$ единиц после первого шага и при наличии $(k+1)$ единиц перед первым шагом равнозначны, т. е.

$$P(S_\tau = A \mid S_1 = k+1) = P(S_\tau = A \mid S_0 = k+1) = f(k+1).$$

Аналогично преобразовывается второе слагаемое в (1), поэтому из (1) получаем

$$f(k) = \frac{1}{2}(f(k+1) + f(k-1)).$$

Отсюда

$$f(k+1) - f(k) = f(k) - f(k-1),$$

или
$$\Delta f(k)=\Delta f(k-1),$$
где $\Delta f(k)=f(k+1)-f(k)$ — конечная разность.

Постоянство конечной разности, по аналогии с постоянством производной, подсказывает, что $f(k)$ должна быть линейной функцией, $f(k)=\alpha+\beta k$. Так как очевидно, что $f(A)=1$, $f(-B)=0$, то из системы
$$\begin{cases}\alpha+\beta A=1,\\ \alpha-\beta B=0\end{cases}$$
немедленно находим $\alpha$ и $\beta$ и, значит,
$$f(k)=\frac{k+B}{A+B},$$
откуда получаем искомое значение $P(S_\tau=A)$:
$$P(S_\tau=A)=f(0)=\frac{B}{A+B}. \tag{2}$$

2. Второй вопрос, связанный со случайным блужданием — средняя продолжительность игры, т. е. $\mathsf{E}(\tau)$. Применим здесь метод предыдущего пункта, предполагая, что $\mathsf{E}(\tau)<\infty$ (это будет доказано позже). Обозначим
$$g(k)=\mathsf{E}\left(\tau\right|S_0=k)$$
(т. е. условное математическое ожидание времени $\tau$ при условии, что начальный капитал равен $k$). Анализируя первый шаг, получим (с учетом определения математического ожидания)
$$\begin{aligned}g(k)=\sum_{l=0}^{\infty} l\cdot P(\tau=l\mid S_0=k)=&\\ =\sum_{l=0}^{\infty} l\cdot (P(\tau=l\mid S_0=k,X_1=1)\cdot P(X_1=1)+&\\ +P(\tau=l\mid S_0=k,X_1=-1)\cdot P(X_1=-1))=&\\ =\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty} l\cdot (P(\tau=l\mid S_1=k+1)+P(\tau=l\mid S_1=k-1)).&\end{aligned}$$

Рассуждая, как и в предыдущем пункте, нетрудно понять, что вероятность остановки игры в момент $l$ с капиталом $m$ в момент времени 1 равна вероятности остановки игры в момент $l-1$ с капиталом $m$ в момент времени 0, т. е.

$$P(\tau = l \mid S_1 = m) = P(\tau = l-1 \mid S_0 = m),$$

значит, заменяя индекс суммирования,

$$g(k) = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty} l\cdot(P(\tau = l-1 \mid S_0 = k+1) + P(\tau = l-1 \mid S_0 = k-1)) =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)\cdot(P(\tau = m \mid S_0 = k+1) + P(\tau = m \mid S_0 = k-1)) =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty} m\cdot P(\tau = m \mid S_0 = k+1) + \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty} m\cdot P(\tau = m \mid S_0 = k-1) +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty} P(\tau = m \mid S_0 = k+1) + \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty} P(\tau = m \mid S_0 = k-1) \quad (3)$$

Поскольку из $\mathsf{E}(\tau) < \infty$ следует, что $\tau$ принимает конечное значение с вероятностью 1, то каждая из сумм рядов в двух последних слагаемых в (3) равна 1. Таким образом,

$$g(k) = \frac{1}{2}\mathsf{E}\,(\tau | \, S_0 = k+1) + \frac{1}{2}\mathsf{E}\,(\tau | \, S_0 = k-1) + 1 = \frac{1}{2}g(k+1) + \frac{1}{2}g(k-1) + 1.$$

Отсюда,

$$\frac{1}{2}\Delta g(k) = \frac{1}{2}\Delta g(k-1) - 1$$

или, обозначая через

$$\Delta^2 g(k) = \Delta g(k+1) - \Delta g(k)$$

вторую разность, получим

$$\frac{1}{2}\Delta^2 g(k-1) = -1.$$

Используя опять аналогию со второй производной, находим, что общий вид решения полученного разностного уравнения есть

$$g(k) = -k^2 + \alpha k + \beta.$$

Замечаем теперь, что

$$g(A) = \mathsf{E}\,(\tau|\, S_0 = A) = \mathsf{E}\,(\tau|\, S_0 = -B) = g(-B) = 0.$$

Отсюда легко найти, что

$$g(k) = -(k - A)(k + B).$$

Таким образом,

$$\mathsf{E}\,(\tau) = g(0) = AB. \tag{4}$$

Отметим любопытное следствие формулы (4). Взяв предел $B \to +\infty$, найдем, что, задав

$$\tilde{\tau} = \min\{n : S_n = A\},$$

будем иметь

$$\mathsf{E}\,(\tilde{\tau}) = \lim_{B \to +\infty} AB = +\infty,$$

т. е. даже установив в качестве ограничения времени игры условие получения капитала размером $+1$ (стартуя с 0 и не ограничивая величины возможного проигрыша по ходу игры), среднее время такой игры будет равно $+\infty$.

3. Вернемся теперь к доказательству того факта (использовавшегося в предыдущем пункте), что $\mathsf{E}\,(\tau) < +\infty$. Докажем даже больше, а именно, что

$$\mathsf{E}\left(\tau^d\right) < +\infty \tag{5}$$

для всех $d > 0$.

Обозначим через $p$ вероятность выигрыша игрока $A + B$ раз подряд, т. е. $p = 2^{-(A+B)}$. Тогда из неравенства $\tau > k(A + B)$ следует, что ни в одной из серий с момента $j(A+B)$ до $(j+1)(A+B)-1$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$, не имеет места выигрыш $(A+B)$ раз подряд, т. е., с учетом независимости этих серий,

$$P(\tau > k(A + B)) \leqslant (1 - p)^k. \tag{6}$$

Получили, что

$$P(\tau = \infty) \leqslant P(\tau > k(A + B)) \leqslant (1 - p)^k \text{ для всех } k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда,

$$P(\tau = \infty) = 0.$$

Далее запишем очевидное неравенство

$$\tau^d \mathbb{I}_{\{(k-1)(A+B)<\tau\leqslant k(A+B)\}} \leqslant k^d \cdot (A+B)^d \mathbb{I}_{\{(k-1)(A+B)<\tau\}}$$

(здесь $\mathbb{I}_A$ — индикатор события $A$, т. е. $\mathbb{I}_A(\omega) = 1$, если $\omega \in A$ и 0 в противном случае). Суммируя эти неравенства, получим

$$\tau^d \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{I}_{\{(k-1)(A+B)<\tau\leqslant k(A+B)\}} = \tau^d P(\tau < \infty) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} k^d (A+B)^d \mathbb{I}_{\{(k-1)(A+B)<\tau\}}.$$

Отсюда, с учетом того, что $P(\tau < \infty) = 1$, имеем

$$\tau^d \leqslant (A+B)^d \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k^d \mathbb{I}_{\{(k-1)(A+B)<\tau\}}.$$

Беря математическое ожидание от обеих частей и используя (6) и то, что $\mathsf{E}\,(\mathbb{I}_A) = P(A)$ для любого события $A$, выводим

$$\mathsf{E}\left(\tau^d\right) \leqslant (A+B)^d \sum_{k=1}^{\infty} k^d P((k-1)(A+B) < \tau) \leqslant (A+B)^d \sum_{k=1}^{\infty} k^d (1-p)^{k-1}.$$

Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^d (1-p)^{k-1}$ сходится при $0 < p < 1$, $d > 0$ (по признаку Даламбера), то (5) доказано.

4. Найдем теперь распределение случайной величины $\tilde{\tau}$, введенной в конце пункта 2 (для простоты будем считать $A = 1$).

Прежде всего установим, что $P(\tilde{\tau} = \infty) = 0$. Для этого применим неравенство (6), полагая в нем $k = B \cdot 2^{A+B}$. Имеем

$$P(\tau > B \cdot 2^{A+B}(A+B)) \leqslant \left(1 - \frac{1}{2^{A+B}}\right)^{2^{A+B} \cdot B}.$$

Устремляя $B$ к бесконечности и учитывая, что

$$\lim_{B\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{A+B}}\right)^{2^{A+B}} = e^{-1},$$

получаем $P(\tilde{\tau} = \infty) \leqslant 0$.

Рассмотрим теперь производящую функцию $\varphi(z) = \mathsf{E}\left(z^{\tilde\tau}\right)$. Снова проанализируем первый шаг:

$$\mathsf{E}\left(z^{\tilde\tau}\middle|\, S_0=0\right) = \mathsf{E}\left(z^{\tilde\tau}\middle|\, S_0=0, X_1=1\right)\cdot P(X_1=1)+$$
$$+\,\mathsf{E}\left(z^{\tilde\tau}\middle|\, S_0=0, X_1=-1\right)\cdot P(X_1=-1) = z\cdot\frac{1}{2} + \mathsf{E}\left(z^{\tilde\tau}\middle|\, S_1=-1\right)\cdot\frac{1}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z\mathsf{E}\left(z^{\tilde\tau}\middle|\, S_0=-1\right). \quad (7)$$

Заметим теперь, что достижение капитала в 1 ед. с начальным капиталом в $-1$ ед. равновозможно достижению капитала в 2 ед. с нулевым начальным значением, т. е.

$$\mathsf{E}\left(z^{\tilde\tau}\middle|\, S_0=-1\right) = \mathsf{E}\left(z^{\tau_2}\middle|\, S_0=0\right), \quad (8)$$

где $\tau_2 = \min\{n : S_n = 2\}$.

Далее, случайные величины $\tau_2 - \tilde\tau$ и $\tilde\tau$ независимы, поэтому

$$\mathsf{E}\left(z^{\tau_2}\right) = \mathsf{E}\left(z^{\tilde\tau+\tau_2-\tilde\tau}\right) = \mathsf{E}\left(z^{\tilde\tau}\right)\cdot\mathsf{E}\left(z^{\tau_2-\tilde\tau}\right),$$

но, поскольку $\tau_2 - \tilde\tau$ равнораспределена с $\tilde\tau$, то

$$\mathsf{E}\left(z^{\tau_2}\right) = \left(\mathsf{E}\left(z^{\tilde\tau}\right)\right)^2,$$

т. е., с учетом (7) и (8),

$$\varphi(z) = \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{2}z\left(\varphi(z)\right)^2,$$

откуда, с учетом того, что $\varphi(0)=0$, получаем

$$\varphi(z) = \frac{1-\sqrt{1-z^2}}{z}.$$

Раскладывая $\varphi(z)$ в степенной ряд, найдем

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!}(-1)^{k+1}z^{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}C_{2k}^{k}\cdot 2^{-2k}z^{2k-1}.$$

Так как по определению математического ожидания

$$\varphi(z) = \mathsf{E}\left(z^{\tilde\tau}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}P(\tilde\tau=k)z^k,$$

то имеем следующее распределение для $\tilde{\tau}$:

$$P(\tilde{\tau} = m) = \begin{cases} \frac{1}{2k-1} C_{2k}^k \cdot 2^{-2k}, \text{ при } m = 2k-1, \\ 0, \text{ при } m = 2k. \end{cases}$$

В качестве следствия из найденного распределения оценим, при каких $\alpha > 0$ математическое ожидание $\mathsf{E}\,(\tilde{\tau}^\alpha)$ конечно:

$$\mathsf{E}\,(\tilde{\tau}^\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \frac{(2k)!}{(k!)^2} 2^{-2k} \cdot (2k-1)^\alpha. \tag{9}$$

Чтобы исследовать сходимость этого ряда, применим формулу Стирлинга:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{e^n},$$

откуда ряд (9) сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \frac{\sqrt{2k}(2k)^{2k}(e^k)^2}{e^{2k}(\sqrt{k})^2(k^k)^2} 2^{-2k}(2k-1)^\alpha,$$

или

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha - \frac{3}{2}},$$

т. е. при $\alpha - \frac{3}{2} < -1$.

Таким образом, $\mathsf{E}\,(\tilde{\tau}^\alpha) < \infty$ лишь при $\alpha < \frac{1}{2}$.

## Вопросы и задачи

1. Опишите $\sigma$-алгебру, соответствующую описанному в этом параграфе случайному блужданию.

2. Примените метод анализа первого шага к нахождению $\mathsf{E}\,(\tau^2)$.

3. Проделайте вычисления, аналогичные выполненным в пунктах 1 и 2, для нахождения тех же величин для случая «нечестной» игры, т.е. когда случайная величина $X$ такова, что $P(X = +1) = p$; $P(X = -1) = q$ и $p < q$.

# 2 Мартингалы. Дискретное время

Сначала об истории термина «мартингал». Мартингалом называют часть конской сбруи, не позволяющую коню поднимать голову слишком высоко. У игроков так называется стратегия, состоящая в повышении в два раза ставки в случае проигрыша и прекращения игры в случае выигрыша. Нетрудно понять, что (при наличии сколь угодно большого капитала для возможного увеличения ставки), стартуя со ставки в 1 ед., игра закончится выигрышем 1 ед. капитала.

Опишем эту стратегию в терминах случайных величин, используя обозначения предыдущего параграфа.

Положим

$$A_1 = 1, A_n = \begin{cases} 2A_{n-1}, & \text{если } X_{n-1} = -1 \text{ и } A_{n-1} \neq 0, \\ 0, & \text{если } X_{n-1} = 1 \text{ или } A_{n-1} = 0. \end{cases}$$

Тогда случайная величина

$$M_n = A_1(S_1 - S_0) + A_2(S_2 - S_1) + \ldots + A_n(S_n - S_{n-1})$$

будет описывать упомянутую мартингальную стратегию, т. е. после первого выигрыша значение $M_n$ не будет изменяться и будет равно 1.

Дадим теперь формальное определение мартингала.

**Определение 2.1.** *Последовательность случайных величин* $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ *называется мартингалом (по отношению к возрастающей последовательности σ-алгебр* $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \ldots$*), если*

1. $M_n$ *измерима относительно* $\mathcal{F}_n$*,*
2. $\mathsf{E}\left(|M_n|\right) < \infty$ *при всех* $n$*,*
3. $\mathsf{E}\left(M_n | \mathcal{F}_{n-1}\right) = M_{n-1}$.

Последовательность $\sigma$-алгебр $\{\mathcal{F}_n\}$ для случайного блуждания удобно представлять себе как последовательность, $n$-й элемент которой содержит всевозможные исходы всех испытаний с номерами от 1 до $n$ включительно. Тогда измеримость случайной величины $M_n$ относительно $\mathcal{F}_n$

означает, что значения величины $M_n$ полностью определяются исходами первых $n$ испытаний. Отметим также, что в определении мартингала неявно (в условном математическом ожидании) присутствует вероятностная мера, заданная на $\sigma$-алгебрах $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \ldots$ (это обстоятельство будет весьма существенным для приложений).

Свойство мартингалов: Если $\{M_n\}$ — мартингал, то $\mathsf{E}\,(M_n) = \mathsf{E}\,(M_0)$ для всех $n$. Действительно, применяя свойство d) условных математических ожиданий (см. приложение A.2) и свойство 3 мартингалов, получим

$$\mathsf{E}\,(M_n) = \mathsf{E}\,(\mathsf{E}\,(\,M_n|\,\mathcal{F}_{n-1})) = \mathsf{E}\,(M_{n-1}) = \ldots = \mathsf{E}\,(M_0)\,.$$

## 2.1 Примеры мартингалов

Во всех случаях $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$ — описанная выше последовательность $\sigma$-алгебр для случайного блуждания.

1. $M_n = S_n$. То, что $M_n$ измеримо относительно $\mathcal{F}_n$, очевидно (значения капитала в момент $n$ полностью определяется исходами испытаний с 1-го по $n$-е). Поскольку $|S_n| \leqslant n$, то второе свойство также выполняется. Проверим третье свойство:

$$\mathsf{E}\,(\,S_n|\,\mathcal{F}_{n-1}) = \mathsf{E}\,(\,S_n - S_{n-1} + S_{n-1}|\,\mathcal{F}_{n-1}) =$$

(по свойству линейности условного математического ожидания)

$$= \mathsf{E}\,(\,S_n - S_{n-1}|\,\mathcal{F}_{n-1}) + \mathsf{E}\,(\,S_{n-1}|\,\mathcal{F}_{n-1})\,.$$

Так как $S_n - S_{n-1} = X_n$ не зависит от исходов предыдущих испытаний, то условное математическое ожидание равно обычному (безусловному):

$$\mathsf{E}\,(\,S_n - S_{n-1}|\,\mathcal{F}_{n-1}) = \mathsf{E}\,(\,X_n|\,\mathcal{F}_{n-1}) = \mathsf{E}\,(X_n)\,,$$

подсчитав которое, найдем

$$\mathsf{E}\,(X_n) = 1 \cdot P(X_n = 1) + (-1) \cdot P(X_n = -1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Поскольку $S_{n-1}$ полностью определяется исходами с 1-го по $n-1$-й, то $S_{n-1}$ по отношению к $\sigma$-алгебре $\mathcal{F}_{n-1}$ не случайна, т. е.

$$\mathsf{E}\,(\,S_{n-1}|\,\mathcal{F}_{n-1}) = S_{n-1}.$$

Подставляя, найдем

$$\mathsf{E}\left(S_n \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right) = S_{n-1},$$

что и требовалось.

2. Рассмотрим теперь «нечестную игру», т. е. такую последовательность независимых величин $X_n$, что

$$P(X_n = 1) = p, \quad P(X_n = -1) = q = 1 - p, \quad q > p.$$

Другими словами, последовательность $\sigma$-алгебр $\{\mathcal{F}_n\}$ — та же, что и ранее, но вероятностная мера на них — другая. Тогда мартингалом будет последовательность $M_n = S_n - n(p - q)$. Доказательство проводится так же, как и в предыдущем пункте, с той лишь разницей, что $\mathsf{E}\,(X_n) = p - q$.

3. Вернемся к случайному блужданию из лекции 1 ($P(X_1 = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$). Докажем, что $M_n = S_n^2 - n$ — мартингал. Действительно, первое и второе свойство очевидны. Третье свойство следует из следующей цепочки выкладок:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left(M_n \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right) = \mathsf{E}\left((S_n - S_{n-1} + S_{n-1})^2 \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right) - n = \\
= \mathsf{E}\left((S_n - S_{n-1})^2\right) + 2S_{n-1}\mathsf{E}\left(S_n - S_{n-1}\right) + S_{n-1}^2 - n = \\
= S_{n-1}^2 - (n-1) = M_{n-1},
\end{aligned}$$

так как

$$\mathsf{E}\left((S_n - S_{n-1})^2\right) = \mathsf{E}\left(X_n^2\right) = 1.$$

4. Снова рассмотрим «нечестную игру» ($P(X_n = 1) = p$, $P(X_n = -1) = q = 1 - p$, $q > p$). Докажем, что $M_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$ — мартингал. Достаточно проверить третье свойство.

$$\mathsf{E}\left(M_n \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right) = \mathsf{E}\left((q/p)^{S_n - S_{n-1} + S_{n-1}} \middle| F_{n-1}\right) = \mathsf{E}\left((q/p)^{S_n - S_{n-1}}\right) \cdot (q/p)^{S_{n-1}},$$

(здесь используется независимость случайных величин $X_n$ и $S_{n-1}$), откуда, подсчитав

$$\mathsf{E}\left((q/p)^{X_n}\right) = (q/p)^1 \cdot p + (q/p)^{-1} \cdot q = q + p = 1,$$

получаем требуемое.

## 2.2 Момент остановки и соответствующий мартингал

**Определение 2.2.** *Случайная величина $\tau$ со значениями в $\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \infty$ называется марковским моментом (относительно последовательности $\{\mathcal{F}_n\}$), если для каждого $n$ выполняется соотношение $\{\omega : \tau(\omega) \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n$. Если к тому же $P(\tau(\omega) < \infty) = 1$, то марковский момент называется моментом остановки.*

**Теорема 2.1** (О процессе остановки)**.** *Если $\tau$ — марковский момент, $\{M_n\}$ — мартингал (по отношению к последовательности $\{\mathcal{F}_n\}$), то $\{M_{n\wedge\tau}\}$ — мартингал (здесь $n \wedge \tau = \min(n, \tau)$).*

*Доказательство.* Докажем сначала лемму:

**Лемма 2.1.** *Если $\{A_n\}$ — предсказуемая относительно $\{\mathcal{F}_n\}$ последовательность (т. е. $A_n$ измерима относительно $\mathcal{F}_{n-1}$), то мартингальное преобразование $\widetilde{M}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k(M_k - M_{k-1})$ является мартингалом.*

*Доказательство леммы.* Первые два свойства мартингала очевидны. Докажем третье свойство:

$$\mathsf{E}\left(\widetilde{M}_n \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}\left( A_k(M_k - M_{k-1}) \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} A_k(M_k - M_{k-1}) + A_n \cdot \mathsf{E}\left( M_n - M_{n-1} \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right) =$$

(так как все $A_{k+1}$ и $M_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ измеримы относительно $\mathcal{F}_{n-1}$)

$$= \widetilde{M}_{n-1} + A_n \cdot \left(\mathsf{E}\left( M_n \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right) - M_{n-1}\right) = \widetilde{M}_{n-1},$$

(так как $\{M_n\}$ — мартингал). □

Чтобы доказать теорему, рассмотрим случайные величины $A_n = \mathbb{I}_{\{\tau \geqslant n\}}$. Очевидно, что все $A_n$ ограничены, и из равенства $\mathbb{I}_{\{\tau \geqslant n\}} = 1 - \mathbb{I}_{\{\tau < n\}}$ следует, что для марковского момента $\tau$ последовательность $\{A_n\}$ предсказуема.

По лемме соответствующее мартингальное преобразование $\widetilde{M}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k(M_k - M_{k-1})$ является мартингалом. Заметим теперь, что для

$\omega \in \{\omega : \tau(\omega) = m\}$ все $A_k$ для $k \leqslant m$ равны 1, а для $k \geqslant m$ $A_k = 0$, значит, $\widetilde{M}_n = M_n$ для $n \leqslant m$ и $\widetilde{M}_n = M_m$ для $n > m$, т. е. $\widetilde{M}_n = M_{n\wedge\tau}$.

Так как из $\tau(\omega) = \infty$ очевидно следует, что $\widetilde{M}_n = M_n = M_{n\wedge\tau}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то теорема доказана. $\square$

## 2.3 Применение мартингалов к случайным блужданиям

1. Найдем «вероятность неразорения» для нечестной игры. Итак, пусть $X_i$ — независимые случайные величины с распределением

$$P(X_i = 1) = p, \quad P(X_i = -1) = q > p.$$

Через $\tau$ обозначим марковский момент

$$\tau = \min\{n : S_n = A \text{ или } S_n = -B\},$$

где $A, B > 0$ и $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Так же, как и в случае честной игры (см. параграф 1) проверяется, что $P(\tau < \infty) = 1$, т. е. $\tau$ — момент остановки. Обозначим $M_n = (q/p)^{S_n}$.

Так как $\{M_n\}$ — мартингал (см. пример 4 пункта 2.1), то по теореме о процессе остановки $\{M_{n\wedge\tau}\}$ — также мартингал. Поскольку $M_{n\wedge\tau} \leqslant (q/p)^{\max(A,B)}$, то по теореме Лебега A.1)

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\,(M_{n\wedge\tau}) = \mathsf{E}\left(\lim_{n\to\infty} M_{n\wedge\tau}\right). \tag{10}$$

Так как $\{M_{n\wedge\tau}\}$ — мартингал, то

$$\mathsf{E}\,(M_{n\wedge\tau}) = \mathsf{E}\,(M_{0\wedge\tau}) = \mathsf{E}\,(M_0) = (q/p)^0 = 1$$

(здесь мы используем свойство 1 мартингалов). С другой стороны, т. к. $P(\tau < \infty) = 1$, то $\lim_{n\to\infty} M_{n\wedge\tau} = M_\tau$ с вероятностью 1, т. е. почти наверное. Таким образом, из (10) следует, что $\mathsf{E}\,(M_\tau) = 1$. Но

$$\mathsf{E}\,(M_\tau) = (q/p)^A \cdot P(S_\tau = A) + (q/p)^{-B} \cdot P(S_\tau = -B),$$

откуда

$$\left((q/p)^A - (q/p)^{-B}\right) \cdot P(S_\tau = A) = 1 - (q/p)^{-B},$$

т. е.
$$P(S_\tau = A) = \frac{1-(q/p)^{-B}}{(q/p)^{A}-(q/p)^{-B}} = \frac{(q/p)^{B}-1}{(q/p)^{A+B}-1}. \tag{11}$$

2. Вычислим теперь среднюю продолжительность нечестной игры. Для этого в условиях предыдущего примера рассмотрим мартингал $M_n = S_n - n(p-q)$ из примера 2 пункта 2.1. Так же, как и в случае честной игры, используя производящую функцию, можно установить, что $\mathsf{E}\,(\tau) < \infty$. Поскольку $|M_{n\wedge\tau}| \leqslant \max(A,B) + \tau(q-p)$, то по теореме Лебега A.1
$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\,(M_{n\wedge\tau}) = \mathsf{E}\left(\lim_{n\to\infty} M_{n\wedge\tau}\right).$$
Так как (по теореме о процессе остановки) $M_{n\wedge\tau}$ — мартингал, то $\mathsf{E}\,(M_{n\wedge\tau}) = \mathsf{E}\,(M_{0\wedge\tau}) = 0$, и, с учетом того, что $\lim_{n\to\infty} M_{n\wedge\tau} = M_\tau$, получим
$$\begin{aligned}0 = \mathsf{E}\,(M_\tau) = \mathsf{E}\,(S_\tau) - \mathsf{E}\,(\tau)\cdot(p-q) = \\ = A\cdot P(S_\tau = A) - B\cdot P(S_\tau = -B) + \mathsf{E}\,(\tau)\cdot(q-p),\end{aligned}$$
откуда
$$\mathsf{E}\,(\tau) = \left(-(A+B)\cdot\frac{(q/p)^{B}-1}{(q/p)^{A+B}-1} + B\right)\cdot\frac{1}{q-p}.$$

Приведем для наглядности численные результаты (из книги [7]).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Шансы в однократной игре ($p$) | 0.5 | 0.495 | 0.490 | 0.480 | 0.47 |
| Шансы выиграть 100\$ раньше, чем потерять 100\$ | 0.5 | 0.1191 | 0.0179 | 0.0003 | $6\cdot 10^{-6}$ |
| Продолжительность игры ($\mathsf{E}\,(\tau)$) | 10000 | 7616 | 4820 | 2498 | 1667 |

## Вопросы и задачи

1. Проделайте рассуждения, аналогичные использованным в последнем пункте, для нахождения «вероятности неразорения» и средней продолжительности игры в случае честной игры.

2. Рассмотрим игру, в которой на каждом шаге игрок проигрывает 1$ с вероятностью 0.51, выигрывает 1$ с вероятностью 0.47 и выигрывает 2$ с вероятностью 0.02. Ответить на те же вопросы, что и выше, для такой игры, используя мартингал $x^{S_n}$.

3. При каких $a_n$ и $b_n$ последовательность $M_n = S_n^3 + a_n S_n + b_n$, где $S_n$ соответствует случайному блужданию для честной игры, является мартингалом?

# 3 Мартингальный подход к управлению риском платежных обязательств. Дискретное время

Будем рассматривать следующую идеализированную простейшую модель финансового рынка. Имеются два вида ценных бумаг: акции (т. е. рисковый актив) и облигации (считающиеся безрисковым активом). В случае дискретного времени их цены образуют последовательности, обозначаемые соответственно $\{S_n\}$ и $\{b_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$ Безрисковость облигаций выражается в том, что доходность вложения в облигацию за единицу времени фиксирована (процентная ставка банка или учетная ставка центробанка) и равна $r$. Таким образом, $\frac{\Delta b_n}{b_{n-1}} = r$, и $b_n = b_0(1+r)^n$, где $\Delta b_n = b_n - b_{n-1}$, $b_0$ — первоначальная цена одной облигации. Для удобства в дальнейшем будем использовать такую единицу измерения цен, что $b_0 = 1$. В отличие от облигаций, доходность акций $\rho_n$ изменчива, т. е. $\frac{\Delta S_n}{S_{n-1}} = \rho_n$, где $\Delta S_n = S_n - S_{n-1}$ и $S_0$ — начальная цена одной акции.

Описанная модель называется математической моделью финансового $(b, S)$-рынка. Еще одной компонентой, являющейся неотъемлемой характеристикой финансового рынка, является набор допустимых действий, или стратегий, которые можно производить с активами $b$ и $S$. Последовательность $\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)_{n=0,1,\ldots}$ называется стратегией (портфелем), если для каждого $n = 1, 2, \ldots$ $\beta_n$ и $\gamma_n$ полностью определяются значениями цен $S_1, \ldots, S_{n-1}$. Их интерпретация — это количества единиц актива $b$ и $S$ соответственно. Допустимы и отрицательные значения $\beta_n$ или $\gamma_n$.

С портфелем неразрывно связано понятие капитала портфеля:

$$X_n^\pi = \beta_n b_n + \gamma_n S_n.$$

Если изменение капитала портфеля $\Delta X_n^\pi = X_n^\pi - X_{n-1}^\pi$ происходит только за счет изменения цен банковского счета и акций,

$$\Delta X_n^\pi = \beta_n \Delta b_n + \gamma_n \Delta S_n,$$

или

$$\beta_n b_{n-1} + \gamma_n S_{n-1} = \beta_{n-1} b_{n-1} + \gamma_{n-1} S_{n-1},$$

то портфель $\pi$ называется самофинансируемым ($\pi \in SF$).

На финансовом рынке, помимо основных (акции, облигации), можно формировать производные ценные бумаги. Например, форвардный контракт на покупку акции $S$ в момент времени $N$ — это соглашение, регламентирующее одной стороне покупку этой акции, а другой — продажу по цене $F$ (цене поставки).

Другой контракт, европейский опцион покупателя (call) — это соглашение, дающее право одной стороне на покупку акции по цене $K$ (цена исполнения), а другую обязывающее обеспечить продажу акции по цене $K$ в момент $N$. В отличие от форвардного, опционный контракт предполагает в момент заключения уплату премии.

Еще один популярный опцион — европейский опцион продавца (put) — дает право продать акцию по заранее оговоренной цене $K$, обязывая другую сторону в случае погашения опциона купить акцию по цене $K$ в момент $N$. Если моменты погашения опционов не являются жестко зафиксированными, а фиксирован лишь верхний временной предел, то говорят об американских опционах.

Общая черта этих производных ценных бумаг — «оттянутая в будущее» выплата $f_N$. Для форвардного контракта $f_N = F$, для европейского опциона покупателя — $f_N = (S_N - K)^+ = \max\{S_N - K, 0\}$, для европейского опциона продавца — $f_N = (K - S_N)^+$. Эти будущие платежи будем называть платежными обязательствами.

Основной проблемой является нахождение цены такого обязательства в любой момент времени. Ключевым элементом является хеджирование платежных обязательств.

Портфель $\pi$ называется хеджем для $f_N$, если $X_N^\pi \geqslant f_N$ (при любом возможном поведении рынка). Минимальным хеджем называется хедж с минимальным капиталом, т. е. такой хедж $\pi^*$, что для любого $n$, для любого хеджа $\pi$ и при любом возможном поведении рынка $X_n^{\pi^*} \leqslant X_n^\pi$. Естественно считать ценой обязательства $f_N$ начальный капитал минимального хеджа, $X_0^{\pi^*}$.

Введем теперь последовательность $\sigma$-алгебр $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^N$ с элементарными событиями, состоящими из исходов торгов до соответствующего момента времени. Такая последовательность, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_N$ называется информационным потоком. Вместе с заданной вероятностью каждого исхода он образует стохастический базис. Для $(b, S)$-рынка $b_n$ — неслучайная последовательность, $S_1, \ldots, S_N$ — случайные величины, $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \ldots, S_n)$, т. е. $\sigma$-алгебра $\mathcal{F}_n$ состоит из исходов, определяемых ценами акций в моменты от 1 до $n$.

Биномиальным $(b, S)$-рынком называется $(b, S)$-рынок со стохастическим базисом, определяемым информационным потоком $\{\mathcal{F}_n\}$ и вероятностью $P$, задаваемой следующим образом: величины $\rho_1, \ldots, \rho_n$ являются независимыми случайными величинами, причем $P(\rho_k = b) = p$, $P(\rho_k = a) = 1 - p = q$, где $a < b$ — заданные значения. Соответствующее пространство $\Omega$ можно отождествить с $\{a, b\}^N$ — всевозможными парами упорядоченных последовательностей длины $N$, где на $i$-м месте располагается либо $a$, либо $b$, $\mathcal{F}_N$ — множество всех подмножеств $\Omega$, $P$ — вероятность событий из $\mathcal{F}_N$, подсчитываемая в соответствии со схемой Бернулли.

Платежное обязательство $f_N$ является тогда функцией от случайных величин $S_1, \ldots, S_N$. Ее оценкой (прогнозом) $f_n$ в момент времени $n$ естественно считать условное математическое ожидание $f_N$ на основе текущей информации, т. е. $\mathcal{F}_n$. Итак, $f_n = \mathsf{E}\,(f_N | \mathcal{F}_n)$, и, по свойству условных математических ожиданий,

$$\mathsf{E}\,(f_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \mathsf{E}\,(\mathsf{E}\,(f_N | \mathcal{F}_n) | \mathcal{F}_{n-1}) = \mathsf{E}\,(f_N | \mathcal{F}_{n-1}) = f_{n-1},$$

т. е. $\{f_n\}$ является мартингалом относительно $\{\mathcal{F}_n\}$.

Будем считать теперь, что $-1 < a < r < b$.

Скажем, что на рынке существует арбитражная возможность, если существует портфель $\pi$, удовлетворяющий условию

$$X_0^\pi = 0, \quad X_n^\pi \geqslant 0, \quad n \leqslant N \quad \text{и} \quad P(X_N^\pi > 0) > 0.$$

Это означает, что на таком рынке существует возможность получения дохода без риска.

Отсутствие такой возможности естественно ожидать в случае, если вероятность $P^*$ распределена так, что математическое ожидание (относительно этой вероятности) доходности акции равно доходности облигации, т. е. $\mathsf{E}^*\,(\rho_1) = r$. Отсюда, обозначив $P^*(\rho_1 = b) = p^*$, найдем $b \cdot p^* + a(1 - p^*) = r$, или $p^* = \frac{r-a}{b-a}$.

Установим теперь, что модель биномиального рынка с условием $-1 < a < r < b$ не допускает арбитражных возможностей. Для этого прежде всего убедимся, что дисконтированная цена акции, т. е. $\frac{S_n}{b_n}$, образует мартингал относительно вероятности $P^*$ (считая для простоты $b_0 = 1$):

$$\mathsf{E}^*\left(S_n/b_n \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right) = \mathsf{E}^*\left(S_0 \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{1+\rho_k}{1+r} \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right) =$$

$$= \frac{S_0}{(1+r)^n}\mathsf{E}^*\left(\prod_{k=1}^{n}(1+\rho_k) \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right) = \frac{S_0}{(1+r)^n}\prod_{k=1}^{n-1}(1+\rho_k)\cdot \mathsf{E}^*\left(1+\rho_n\right)$$

(здесь используется независимость $\rho_1, \ldots, \rho_n$ и то, что все $\rho_1, \ldots, \rho_{n-1}$ полностью определяются информацией $\mathcal{F}_{n-1}$). Теперь, возвращаясь к $S_{n-1}$ и $b_{n-1}$, получим

$$\mathsf{E}^*\left(S_n/b_n \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right) = \frac{S_{n-1}}{b_{n-1}} \cdot \frac{\mathsf{E}^*\left(1+\rho_n\right)}{1+r} = \frac{S_{n-1}}{b_{n-1}}.$$

Ввиду этого вероятность $P^*$ называется мартингальной вероятностью.

**Предложение 3.1.** *Для произвольного портфеля $\pi \in SF$ соответствующий дисконтированный капитал $\left\{\frac{X_n^\pi}{b_n}\right\}$ также является мартингалом относительно $P^*$.*

*Доказательство.* С учетом линейности условных математических ожиданий и мартингальности меры $P^*$ имеем

$$\mathsf{E}^*\left(X_n^\pi/b_n \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right) = \mathsf{E}^*\left(\beta_n + \gamma_n\frac{S_n}{b_n} \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right) =$$

$$= \beta_n + \gamma_n \mathsf{E}^*\left(S_n/b_n \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right) = \beta_n + \gamma_n\frac{S_{n-1}}{b_{n-1}} = \frac{X_{n-1}^\pi}{b_{n-1}}$$

□

**Лемма 3.1.** *Вероятность $P^*$ имеет плотность $Z^*$ (т. е. $P^*(A) = \mathsf{E}\left(Z^*\mathbb{I}_A\right)$для любого события $A \subset \Omega$), задаваемую формулой*

$$Z^* = \prod_{k=1}^{N}\left(1 - \frac{\mu - r}{\sigma^2}\cdot(\rho_k - \mu)\right),$$

*где $\mu = \mathsf{E}\left(\rho_k\right), \sigma^2 = \mathsf{V}(\rho_k), k = 1, \ldots, N$.*

*Доказательство.* Так как $\{Z_n^* = \mathsf{E}\,(Z^* |\, \mathcal{F}_n)\}$ — мартингал относительно $\{\mathcal{F}_n\}$ (по свойству условного математического ожидания $\mathsf{E}\,(Z_n^* |\, \mathcal{F}_{n-1}) = \\ = \mathsf{E}\,(\mathsf{E}\,(Z^* |\, \mathcal{F}_n)|\, \mathcal{F}_{n-1}) = \mathsf{E}\,(Z^* |\, \mathcal{F}_{n-1}) = Z_{n-1}^*$), то он допускает представление в виде

$$Z_n^* = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \cdot (\rho_k - \mu),$$

где $\{\varphi_k\}_{k=1}^N$ — предсказуемая по отношению к $\{\mathcal{F}_n\}$ последовательность. В самом деле, записав

$$Z_n^* - Z_{n-1}^* = \varphi_n \cdot (\rho_n - \mu), \tag{12}$$

получим, учитывая, что $Z_n^* = f_n(\rho_1, \ldots, \rho_n)$, что

$$f_n(\rho_1, \ldots, \rho_{n-1}, b) - f_{n-1}(\rho_1, \ldots, \rho_{n-1}) = \varphi_n \cdot (b - \mu) \tag{13}$$

и

$$f_n(\rho_1, \ldots, \rho_{n-1}, a) - f_{n-1}(\rho_1, \ldots, \rho_{n-1}) = \varphi_n \cdot (a - \mu). \tag{14}$$

Учитывая мартингальность $\{Z_n^*\}$ ($\mathsf{E}\,(f_n - f_{n-1} |\, \mathcal{F}_{n-1}) = 0$), получим

$$p \cdot f_n(\rho_1, \ldots, \rho_{n-1}, b) + (1 - p) \cdot f_n(\rho_1, \ldots, \rho_{n-1}, a) = f_{n-1}(\rho_1, \ldots, \rho_{n-1}),$$

или

$$\frac{f_n(\rho_1, \ldots, \rho_{n-1}, b) - f_{n-1}(\rho_1, \ldots, \rho_{n-1})}{1 - p} = \\ = \frac{f_{n-1}(\rho_1, \ldots, \rho_{n-1}) - f_n(\rho_1, \ldots, \rho_{n-1}, a)}{p}.$$

Поскольку $\mu = pb + (1 - p)a$ или $p = \frac{\mu - a}{b - a}$, то имеем (13), (14) с $\varphi_n$, полностью определяемой заданием $\rho_1, \ldots, \rho_{n-1}$, т. е. предсказуемой по отношению к $\{\mathcal{F}_n\}$. Из формулы (12) следует (например, по индукции), что

$$Z_n^* = \prod_{k=1}^{n} (1 + \psi_k \cdot (\rho_k - \mu)),$$

где

$$\psi_k \cdot Z_{k-1}^* = \varphi_k.$$

Поскольку $Z^*$ — плотность мартингальной вероятности, то

$$\begin{aligned}
0 &= \mathsf{E}^*(\rho_1 - r) = \mathsf{E}(Z^*(\rho_1 - r)) = \mathsf{E}(\mathsf{E}(Z^*(\rho_1 - r)|\,\mathcal{F}_1)) = \\
&= \mathsf{E}(\mathsf{E}(Z^*|\,\mathcal{F}_1)(\rho_1 - r)) = \mathsf{E}(Z_1^*(\rho_1 - r)) = \\
&= \mathsf{E}((1 + \psi_1(\rho_1 - \mu)) \cdot (\rho_1 - r)) = \\
&= (\mu - r) + \psi_1 \mathsf{E}((\rho_1 - \mu)(\rho_1 - \mu)) + \psi_1 \mathsf{E}((\rho_1 - \mu)(\mu - r)) = \\
&\qquad\qquad = (\mu - r) + \psi_1 \cdot \sigma^2 + 0,
\end{aligned}$$

откуда

$$\psi_1 = -\frac{\mu - r}{\sigma^2}.$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
0 &= \mathsf{E}^*(\rho_k - r|\,\mathcal{F}_{k-1}) = \mathsf{E}(Z^*(\rho_k - r)|\,\mathcal{F}_{k-1}) = \\
&= \mathsf{E}(\mathsf{E}(Z^*(\rho_k - r)|\,\mathcal{F}_k)|\,\mathcal{F}_{k-1}) = \mathsf{E}(\mathsf{E}(Z^*|\,\mathcal{F}_k)(\rho_k - r)|\,\mathcal{F}_{k-1}) = \\
&= \mathsf{E}(Z_k^*(\rho_k - r)|\,\mathcal{F}_{k-1}) = Z_{k-1}^* \cdot \mathsf{E}((1 + \psi_k(\rho_k - \mu))(\rho_k - r)|\,\mathcal{F}_{k-1}) = \\
&= Z_{k-1}^* \cdot \big(\mathsf{E}(\rho_k - r) + \psi_k \mathsf{E}\big((\rho_k - \mu)^2\big) + \psi_k \cdot \mathsf{E}((\rho_k - \mu)(\mu - r))\big) = \\
&\qquad\qquad = Z_{k-1}^* \cdot (\mu - r + \psi_k \cdot \sigma^2),
\end{aligned}$$

откуда

$$\psi_k = -\frac{\mu - r}{\sigma^2}, \quad k = 1, 2, \ldots, N,$$

и лемма доказана. □

В силу определения плотности для любой измеримой случайной величины $X$

$$\mathsf{E}^*(X) = \mathsf{E}(Z^* X).$$

Тогда, предполагая, что $\widetilde{\pi}$ — арбитражная стратегия, а $Z^*$ — введенная только что случайная величина, соответствующая мартингальной вероятности $P^*$, получим, что, с одной стороны, ввиду $\widetilde{\pi} \in SF$ и мартингальности $\left\{\frac{X_n^{\widetilde{\pi}}}{b_n}\right\}$

$$\mathsf{E}^*\left(\frac{X_N^{\widetilde{\pi}}}{b^N}\right) = \mathsf{E}^*\left(\frac{X_0^{\widetilde{\pi}}}{b_0}\right) = X_0^{\widetilde{\pi}} = 0,$$

а с другой стороны,поскольку из неравенств $(\mu - r)(a - \mu) < (\mu - b)(a - \mu) = \sigma^2$ и $(\mu - r)(b - \mu) < (b - \mu)(\mu - a) = \sigma^2$ следует, что $\min Z^* > 0$, то

$$\mathsf{E}^*\left(\frac{X_N^{\widetilde{\pi}}}{b_N}\right) = b_N^{-1} \mathsf{E}^*\left(X_N^{\widetilde{\pi}}\right) = b_N^{-1} \mathsf{E}\left(Z^* X_N^{\widetilde{\pi}}\right) \geqslant b_N^{-1} \cdot \min Z^* \cdot \mathsf{E}\left(X_N^{\widetilde{\pi}}\right) > 0.$$

Полученное противоречие доказывает, что арбитражных возможностей нет.

Покажем теперь, что использование риск-нейтральной вероятности $P^*$ позволяет получать минимальный хедж на рассматриваемом биномиальном $(b, S)$-рынке. Поскольку при использовании вероятности $P^*$, как было показано выше, отсутствует арбитраж, то прогноз $\mathsf{E}^*\left(f_N/b_N \middle| \mathcal{F}_n\right)$ естественно считать безарбитражной ценой платежного обязательства $f_N$ в момент времени $n$. Ценой обязательства в начальный момент времени тогда будет $\mathsf{E}^*\left(f_N/b_N\right)$.

Так как $M_n^* = \mathsf{E}^*\left(f_N/b_N \middle| \mathcal{F}_n\right)$ является мартингалом (относительно риск-нейтральной вероятности), то для него можно вывести (как в ходе доказательства леммы) мартингальное представление

$$M_n^* = M_0^* + \sum_{k=1}^{n} \varphi_k^* \cdot (\rho_k - r),$$

где $\varphi_k^* = \varphi_k^*(S_1, \ldots, S_{k-1})$ — предсказуемая последовательность.

Определим теперь параметры портфеля $\pi^*$ как $\gamma_k^* = \varphi_k^* \frac{b_k}{S_{k-1}}$ и $\beta_k^* = M_{k-1}^* - \gamma_k^* \frac{S_{k-1}}{b_{k-1}}$. Тогда капитал такого портфеля равен

$$X_n^{\pi^*} = \beta_n^* b_n + \gamma_n^* S_n.$$

Так как

$$\frac{X_n^{\pi^*}}{b_n} = \beta_n^* + \gamma_n^* \frac{S_n}{b_n} = M_{n-1}^* - \varphi_n^* \frac{b_n}{b_{n-1}} + \varphi_n^* \frac{S_n}{S_{n-1}} = M_{n-1}^* + \varphi_n^*(\rho_n - r) = M_n^*,$$

то

$$\Delta X_n^{\pi^*} = X_n^{\pi^*} - X_{n-1}^{\pi^*} = M_n^* b_n - M_{n-1}^* b_{n-1} = M_{n-1}^*(b_n - b_{n-1}) + \varphi_n^* b_n(\rho_n - r),$$

а, с другой стороны,

$$\begin{aligned} \beta_n^* \Delta b_n + \gamma_n^* \Delta S_n &= \beta_n^*(b_n - b_{n-1}) + \gamma_n^*(S_n - S_{n-1}) = \\ &= M_{n-1}^*(b_n - b_{n-1}) - \varphi_n^* \frac{b_n}{b_{n-1}}(b_n - b_{n-1}) + \varphi_n^* \frac{b_n}{S_{n-1}}(S_n - S_{n-1}) = \\ &= M_{n-1}^*(b_n - b_{n-1}) + \varphi_n^* b_n(\rho_n - r), \end{aligned}$$

т. е. портфель $\pi^*$ — самофинансируемый. По построению

$$X_N^{\pi^*} = M_N^* \cdot b_N = b_N \cdot \mathsf{E}^*\left(f_N/b_N \middle| \mathcal{F}_N\right) = f_N,$$

т. е. $\pi^*$ — хедж для обязательства $f_N$.

Для любого другого хеджа $\pi$ имеем (поскольку $\frac{X_n^\pi}{b_n}$ — мартингал относительно риск-нейтральной вероятности, см. предложение 3.1)

$$\frac{X_n^\pi}{b_n} = \mathsf{E}^* \left( \frac{X_N^\pi}{b_N} \middle| \mathcal{F}_n \right) \geqslant \mathsf{E}^* \left( \frac{f_N}{b_N} \middle| \mathcal{F}_n \right) = M_n^* = \frac{X_n^{\pi^*}}{b_n}.$$

Таким образом, $\pi^*$ — минимальный хедж.

Применим теперь описанную методологию к нахождению цены $\mathbb{C}_N$ европейского опциона покупателя, т. е. $f_N = (S_N - K)^+$, $k \geqslant 0$. По только что доказанному

$$\mathbb{C}_N = \mathsf{E}^* \left( \frac{(S_N - K)^+}{b_N} \right) = \frac{\mathsf{E}^* \left( (S_N - K)\mathbb{I}_{\{S_N \geqslant k\}} \right)}{(1+r)^N}.$$

$$\mathsf{E}^* \left( (S_N - K)\mathbb{I}_{\{S_N \geqslant K\}} \right) = \sum_{k=0}^{N} P^*(p_j = b \ k \text{ раз и } p_j = a \ N-k \text{ раз}) \cdot \\ \cdot \left( S_0(1+b)^k(1+a)^{N-k} - K \right) \mathbb{I}_{\left\{ S_0(1+b)^k(1+a)^{N-k} \geqslant K \right\}}.$$

Обозначим

$$k_0 = \min \left\{ k : S_0(1+b)^k(1+a)^{N-k} \geqslant K \right\} = \\ = \left[ \log_{\left(\frac{1+b}{1+a}\right)} \frac{K}{S_0(1+a)^N} \right] + 1 = \left[ \frac{\ln \frac{K}{S_0(1+a)^N}}{\ln \left( \frac{1+b}{1+a} \right)} \right] + 1,$$

где $[x]$ - целая часть числа $x$, т.е. наибольшее целое, не превосходящее $x$. Тогда, учитывая формулу Бернулли,

$$P^*(p_j = b \ k \text{ раз и } p_j = a \ (N-k) \text{ раз}) = \binom{N}{k} (p^*)^k \cdot (1-p^*)^{N-k},$$

получим

$$\mathbb{C}_N = \frac{1}{(1+r)^N} \sum_{k=k_0}^{N} \binom{N}{k} \left( S_0(1+b)^k(1+a)^{N-k} - K \right) (p^*)^k (1-p^*)^{N-k}.$$

Обозначив $B(j, N, p) = \sum_{k=j}^{N} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$, получим

$$-(1+r)^{-N} K \sum_{k=k_0}^{N} \binom{N}{k} (p^*)^k (1-p^*)^{N-k} = -(1+r)^{-N} K B(k_0, N, p^*),$$

и

$$(1+r)^{-N}\sum_{k=k_0}^{N} S_0(1+b)^k(1+a)^{N-k}(p^*)^k(1-p^*)^{N-k} =$$
$$= S_0\sum_{k=k_0}^{N}\left(\frac{p^*(1+b)}{1+r}\right)^k\cdot\left(\frac{(1+a)(1-p^*)}{1+r}\right)^{N-k}\binom{N}{k}.$$

Так как, полагая $\widetilde{p}=\frac{p^*(1+b)}{1+r}$, будем иметь

$$1-\widetilde{p}=\frac{1+r-p^*(1+b)}{1+r}=\frac{1+r-\frac{r-a}{b-a}(1+b)}{1+r}=$$
$$=\frac{(1+r)(b-a)-(r-a)(1+b)}{(1+r)(b-a)}=\frac{(b-r)(1+a)}{(1+r)(b-a)}=\frac{(1+a)(1-p^*)}{1+r},$$

то

$$S_0\cdot\sum_{k=k_0}^{N}\binom{N}{k}\left(\frac{p^*(1+b)}{1+r}\right)^k\left(\frac{(1+a)(1-p^*)}{1+r}\right)^{N-k}=S_0B(k_0,N,\widetilde{p}).$$

Таким образом, доказана формула Кокса-Росса-Рубинштейна

$$\mathbb{C}_N=S_0B(k_0,N,\widetilde{p})-(1+r)^{-N}KB(k_0,N,p^*).$$

Так как $(K-S_N)^+=(S_N-K)^+-S_N+K$, то, обозначая цену европейского опциона продавца через $\mathbb{P}_N$ и учитывая мартингальность $\frac{S_n}{b_n}$ относительно $P^*$, получим

$$\mathbb{P}_N=\mathsf{E}^*\left(\frac{(K-S_N)^+}{b_N}\right)=$$
$$=\mathsf{E}^*\left(\frac{(S_N-K)^+}{b_N}\right)-\mathsf{E}^*\left(\frac{S_N}{b_N}\right)+K\cdot(1+r)^{-N}=$$
$$=\mathbb{C}_N-S_0+K(1+r)^{-N}.$$

Эта формула называется паритетом цен покупателя и продавца.

Заметим теперь, что цена $\mathbb{C}_N$ называется безарбитражной ценой из следующих соображений: если продавец опциона продает его по более высокой цене $x>\mathbb{C}_N$, то, вложив $\mathbb{C}_N$ единиц капитала в минимальный хедж, он гарантированно получит $x - \mathbb{C}_N > 0$ единиц в качестве дохода, не зависящего ни от какой рыночной конъюнктуры (т. е. у продавца имеется арбитражная возможность). Аналогично, при цене $x < \mathbb{C}_N$ арбитражная возможность есть уже у покупателя, и, следовательно, именно безарбитражная цена является наиболее приемлемой и для покупателя, и для продавца.

## Вопросы и задачи

1. Напишите программу, вычисляющую цену европейских опционов покупателя и продавца с помощью выведенных в этом параграфе формул.

2. Найдите параметры замещающего портфеля для европейского опциона покупателя в условиях рассмотренной в этом параграфе модели рынка.

3. Найдите безарбитражную цену европейского опциона покупателя в случае, когда вероятности изменения цены акции на каждом шаге свои, для $N = 2$.

# 4 Броуновское движение

**Определение 4.1.** *Пусть* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *— вероятностное пространство и* $\mathbb{T} = [0, \infty)$. *Семейство* $\{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ *случайных величин называется случайным процессом с непрерывным временем. При фиксированном* $\omega \in \Omega$ *функция времени* $X_t(\omega)$ *называется траекторией или реализацией, отвечающей элементарному исходу* $\omega$.

**Определение 4.2.** *Стандартным броуновским движением называется случайный процесс* $\{B_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ *такой, что*

1. $B_0 \equiv 0$,

2. *для любых моментов времени* $0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \infty$ *случайные величины*

$$B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$$

*независимы (т. е. процесс* $\{B_t\}$ *— с независимыми приращениями);*

3. *для любых моментов времени* $0 \leqslant s < t < \infty$ *случайная величина*

$$B_t - B_s$$

*распределена по нормальному закону, причем* $\mathsf{E}\,(B_t - B_s) = 0$, $\mathsf{V}(B_t - B_s) = t - s$;

4. *с единичной вероятностью траектории процесса* $\{B_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ *являются непрерывными функциями на* $[0, \infty)$.

Для того, чтобы построить процесс $\{B_t\}_{t \in \mathbb{T}}$, потребуется определение и некоторые основные свойства многомерного нормального распределения (см. приложение А.2).

**Определение 4.3.** *Случайный процесс* $\{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ *называется гауссовским, если для любых моментов времени* $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ *случайный вектор* $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ *имеет многомерное нормальное распределение.*

**Лемма 4.1.** *Если гауссовский процесс* $\{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ *имеет функцию среднего* $\mu(t) = \mathsf{E}\,(X_t) \equiv 0$ *и функцию ковариации* $f(s,t) = \operatorname{cov}(X_s, X_t) = \min(s,t)$, *то он имеет независимые приращения. Кроме того, если с единичной вероятностью он имеет непрерывные траектории и* $X_0 \equiv 0$, *то* $\{X_t\}$ *— стандартное броуновское движение.*

*Доказательство.* Для доказательства первой части следует воспользоваться тем, что для нормально распределенных величин из некоррелированности следует независимость (см. приложение). Поэтому достаточно доказать, что случайный вектор приращений имеет диагональную матрицу ковариаций, т. е.

$$\mathsf{E}\left((X_{t_i} - X_{t_{i-1}})(X_{t_j} - X_{t_{j-1}})\right) = 0$$

для $i \neq j$ и любых моментов времени $0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_n$.

В самом деле, предполагая $i < j$, имеем

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\left((X_{t_i} - X_{t_{i-1}})(X_{t_j} - X_{t_{j-1}})\right) = \\
&\qquad = \mathsf{E}\left(X_{t_i} X_{t_j}\right) - \mathsf{E}\left(X_{t_{i-1}} X_{t_j}\right) - \mathsf{E}\left(X_{t_i} X_{t_{j-1}}\right) + \mathsf{E}\left(X_{t_{i-1}} X_{t_{j-1}}\right) =
\end{aligned}$$

(так как $\mathsf{E}\,(X_t) \equiv 0)$

$$= \operatorname{cov}(X_{t_i}, X_{t_j}) - \operatorname{cov}(X_{t_{i-1}}, X_{t_j}) - \operatorname{cov}(X_{t_i}, X_{t_{j-1}}) + \operatorname{cov}(X_{t_{i-1}}, X_{t_{j-1}}) =$$
$$= \min(t_i, t_j) - \min(t_{i-1}, t_j) - \min(t_i, t_{j-1}) + \min(t_{i-1}, t_{j-1}) =$$
$$= t_i - t_{i-1} - t_i + t_{i-1} = 0.$$

Далее, поскольку линейная комбинация компонент многомерного нормально распределенного вектора имеет нормальное распределение, то для любых $0 \leqslant s < t$ случайная величина $X_t - X_s$ имеет нормальное распределение, причем

$$\mathsf{E}\,(X_t - X_s) = \mathsf{E}\,(X_t) - \mathsf{E}\,(X_s) = 0,$$

и

$$\mathsf{V}(X_t - X_s) = \mathsf{E}\left((X_t - X_s)^2\right) = \mathsf{E}\left(X_t^2 - 2X_tX_s + X_s^2\right) =$$
$$= \operatorname{cov}(X_t, X_t) - 2\operatorname{cov}(X_t, X_s) + \operatorname{cov}(X_s, X_s) = t - 2s + s = t - s.$$

Отсюда следует выполнение третьего пункта определения стандартного броуновского движения. □

Для построения броуновского движения потребуется также ряд понятий из теории ортогональных рядов.

**Определение 4.4.** *Система функций $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ из $L_2[0,1]$ (см. приложение A.1) называется полной ортонормированной, если*

$$\int\limits_0^1 \varphi_n(t)\varphi_m(t)dt = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases}$$

*и для каждой $f \in L_2[0,1]$ ряд Фурье $\sum_{n=0}^{\infty} f_n\varphi_n$ сходится к ней в смысле $L_2[0,1]$, т. е.*

$$\int\limits_0^1 \left(\sum_{n=0}^{N} f_n\varphi_n - f\right)^2 dt \xrightarrow[N\to\infty]{} 0,$$

*где $f_n = \int\limits_0^1 f(t)\varphi_n(t)dt$ — коэффициенты Фурье функции $f$.*

Для любых двух функций $f, g$ из $L_2[0,1]$ справедливо тождество Парсеваля

$$\int\limits_0^1 f(x)g(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n,$$

где $g_n = \int\limits_0^1 g(t)\varphi_n(t)dt$ — коэффициенты Фурье функции $g$.

Применяя тождество Парсеваля к функциям $f(x) = \mathbb{I}_{[0,1]}(x)$ и $g(x) = \mathbb{I}_{[0,t]}(x)$, получим

$$\min(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^s \varphi_n(x)dx \int\limits_0^t \varphi_n(x)dx \tag{15}$$

Примером полной ортонормированной системы в $L_2[0,1]$ является система функций Хаара $\{H_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$, задаваемая следующим образом:

$$H_0(t) = 1,$$

$$H(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t < \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} < t \leqslant 1, \\ 0, & t < 0, t = \frac{1}{2}, t > 1. \end{cases}$$

Тогда для каждого натурального числа $n$, представленного единственным образом в виде $n = 2^j + k$, $0 \leqslant k < 2^j$, $j \geqslant 0$, функция $H_n(t)$ определяется как сжатие и сдвиг функции $H(t)$:

$$H_n(t) = 2^{j/2} H(2^j t - k).$$

Так как в формуле (15) участвуют интегралы функций $\varphi_n$, то определим также

$$\Delta(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \leqslant t < \frac{1}{2}, \\ 2(1-t), & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1, \\ 0, & t \notin [0,1], \end{cases}$$

и $\Delta_n(t) = \Delta(2^j t - k)$, для $n = 2^j + k$, $\Delta_0(t) \equiv t$. Тогда

$$\int\limits_0^t H_n(u)du = \lambda_n \Delta_n(t),$$

где $\lambda_n = \frac{1}{2} 2^{-j/2}$.

**Теорема 4.1** (о построении броуновского движения). *Если $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность независимых стандартно распределенных величин, то ряд*

$$X_t = \lambda_0 Z_0 \Delta_0(t) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} \lambda_{2^j+k} Z_{2^j+k} \Delta_{2^j+k}(t) \tag{16}$$

*сходится равномерно на $[0,1]$ с вероятностью 1 и $\{X_t\}_{0\leqslant t\leqslant 1}$ удовлетворяет всем свойствам стандартного броуновского движения на $[0,1]$.*

*Доказательство.* Прежде всего заметим, что для $x \geqslant 1$

$$P(|Z_n| \geqslant x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_x^{\infty} e^{-u^2/2} du \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_x^{\infty} u e^{-u^2/2} du = e^{-\frac{x^2}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

откуда при всех $\alpha > 1$ и $n \geqslant 2$

$$P\left(|Z_n| \geqslant \sqrt{2\alpha \ln n}\right) \leqslant e^{-\alpha \ln n} \sqrt{\frac{2}{\pi}} = n^{-\alpha} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tag{17}$$

Так как ряд $\sum_{n=2}^{\infty} n^{-\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$, то по лемме Бореля-Кантелли (см. приложение A.2)

$$P\left(\sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{I}_{\left\{|Z_n| \geqslant \sqrt{2\alpha \ln n}\right\}} \text{ сходится}\right) = 1,$$

т. е. почти наверное лишь конечное число из событий $\{|Z_n(\omega)| \geqslant \sqrt{2\alpha \ln n}\}$ может иметь место. Тогда

$$C(\omega) := \sup_{2\leqslant n<\infty} \frac{|Z_n(\omega)|}{\sqrt{\ln n}} \tag{18}$$

является случайной величиной, почти наверное конечной.

Заметим, что из представления функций $\Delta_n$ следует, что для произвольных $x \in [0,1]$ и $j = 0, 1, 2, \ldots$ среди значений $\Delta_n(x)$, $n = 2^j + k, k = 0, 1, \ldots, 2^j - 1$ не более одного ненулевого. Кроме того, для тех же $n$ $\ln n < j + 1$. Тогда для достаточно больших $J$ и произвольного $\rho \in \mathbb{N}$ с учетом (18)

$$\sum_{j=J}^{J+\rho}\sum_{k=0}^{2^j-1}\lambda_{2^j+k}|Z^{2^j+k}|\Delta_{2^j+k}(t)\leqslant$$

$$\leqslant C\sum_{j=J}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1}\lambda_{2^j+k}\sqrt{\ln(2^j+k)}\Delta_{2^j+k}(t)\leqslant$$

$$\leqslant C\sum_{j=J}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1}\frac{1}{2}\cdot 2^{-j/2}\sqrt{j+1}\Delta_{2^{j+k}}(t)\leqslant$$

$$\leqslant C\sum_{j=J}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot 2^{-j/2}\sqrt{j+1}<\varepsilon, \quad (19)$$

где используется то, что остаток сходящегося ряда

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot 2^{-j/2}\sqrt{j+1} \quad (20)$$

может быть сделан сколь угодно малым за счет выбора $J$. Из неравенства (19) следует (по критерию Коши равномерной сходимости), что ряд (16) почти наверное сходится равномерно и абсолютно по $t$ на $[0,1]$. Так как все члены ряда (16) — непрерывные на $[0,1]$ функции, то траектории процесса $\{X_t\}_{0\leqslant t\leqslant 1}$ — непрерывные функции (с единичной вероятностью).

Так как

$$\mathsf{E}\left(|Z_n|\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|x|e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}},$$

то

$$\lambda_0\mathsf{E}\left(|Z_0|\right)\Delta_0(t)+\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1}\lambda_{2^j+k}\mathsf{E}\left(|Z_{2^j+k}|\right)\Delta_{2^j+k}(t)\leqslant$$

$$\leqslant\left(\lambda_0\Delta_0(t)+\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1}\lambda_{2^j+k}\Delta_{2^j+k}(t)\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{2\pi}}.$$

Последний ряд сходится равномерно (по признаку Вейерштрасса сравнением с рядом (20)), поэтому случайная величина

$$\lambda_0|Z_0|\Delta_0(t) + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1}\lambda_{2^j+k}|Z_{2^j+k}|\Delta_{2^j+k}(t)$$

суммируема при каждом $t \in [0,1]$. Следовательно, по теореме Лебега А.1

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\,(X_sX_t) &= \mathsf{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n Z_n\Delta_n(s)\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_m Z_m\Delta_m(t)\right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_n\lambda_m\mathsf{E}\,(Z_nZ_m)\cdot\Delta_n(t)\Delta_m(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^2\Delta_n(s)\Delta_n(t) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^s H_n(u)du\int_0^t H_n(u)du.\end{aligned}$$

Применяя формулу (15), получим $\mathsf{E}\,(X_sX_t) = \min(s,t)$.

Докажем, что $(X_t)$ — гауссовский процесс. Для этого найдем производящую функцию случайного вектора $(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})$, где $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_m \leqslant 1$ — произвольные моменты времени:

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left(\exp\left(i\sum_{j=1}^{m}\theta_jX_{t_j}\right)\right) &= \mathsf{E}\left(\exp\left(i\sum_{j=1}^{m}\theta_j\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_nZ_n\Delta_n(t_j)\right)\right) = \\ &= \prod_{n=0}^{\infty}\mathsf{E}\left(\exp\left(i\lambda_nZ_n\sum_{j=1}^{m}\theta_j\Delta_n(t_j)\right)\right).\end{aligned}$$

Учитывая то, что характеристическая функция стандартно нормально распределенной величины $Z_n$ равна $\exp(-x^2/2)$, получим, используя (15)

$$\mathsf{E}\left(\exp\left(i\sum_{j=0}^{m}\theta_j X_{t_j}\right)\right) =$$

$$= \prod_{n=0}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}\lambda_n^2\left(\sum_{j=1}^{m}\theta_j\Delta_n(t_j)\right)^2\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^2\left(\sum_{j=1}^{m}\theta_j\Delta_n(t_j)\right)^2\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\theta_j\theta_k\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^2\Delta_n(t_j)\Delta_n(t_k)\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\min(t_j,t_k)\theta_j\theta_k\right).$$

Это доказывает, что $(X_t)$ — гауссовский процесс. Тогда применение леммы о гауссовских процессах завершает доказательство. □

Чтобы теперь построить броуновское движение на $[0,\infty)$, возьмем независимые процессы $B_t^{(1)}, B_t^{(2)}, \ldots$, каждый из которых уже построен на $[0,1]$ и образуем процесс $B_t$ для $0 \leqslant t < \infty$ по правилу

$$B_t = \sum_{k=1}^{n} B_1^{(k)} + B_{t-n}^{(k)} \quad \text{для } t \in [n, n+1).$$

Построенный процесс и будет являться стандартным броуновским движением.

Докажем теперь, что траектории броуновского движения имеют «плохие» гладкостные свойства.

**Теорема 4.2.** *Пусть $G(\alpha, c, \varepsilon)$ — множество всех $\omega \in \Omega$, при которых найдется $s \in [0,1]$ такое, что для всех $t \in [0,1]$, $|s-t| \leqslant \varepsilon$ выполняется неравенство*

$$|B_s(\omega) - B_t(\omega)| \leqslant c|s-t|^\alpha.$$

*Тогда при всех $\alpha$, $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$, $\varepsilon > 0$, $c > 0$ справедливо равенство*

$$P(G(\alpha, c, \varepsilon)) = 0.$$

*Доказательство.* Зафиксируем натуральное число $m$ (ограничения на него будут наложены позже). Для всех $n \geqslant m$ определим случайные величины $X_{(n,k)}$, $0 \leqslant k \leqslant n-m$ как

$$X_{(n,k)}(\omega) = \max_{k \leqslant j < k+m} |B_{j/n}(\omega) - B_{(j+1)/n}(\omega)|.$$

Это значит, что для любого события $\omega \in G(\alpha, c, \varepsilon)$ найдется $k$, $0 \leqslant k \leqslant n-m$, такое, что

$$X_{(n,k)}(\omega) \leqslant 2c(m/n)^{\alpha}$$

(это $k$ можно определить из требования, чтобы $k/n \leqslant s < (k+1)/n$, а $n$ должно быть настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $m/n < \varepsilon$). Следовательно,

$$G(\alpha, c, \varepsilon) \subset \{\omega : \min_{0 \leqslant k \leqslant n-m} X_{(n,k)}(\omega) \leqslant 2c(m/n)^{\alpha}\}. \tag{21}$$

Так как (в силу свойства 3 броуновского движения) все случайные величины $X_{(n,k)}$, $k = 0, 1, \ldots, n-m$, имеют одинаковые распределения, то

$$P\left(\min_{0 \leqslant k \leqslant n} X_{(n,k)} \leqslant 2c(m/n)^{\alpha}\right) \leqslant \\ \leqslant nP(X_{(n,0)} \leqslant 2c(m/n)^{\alpha}) = n\left[P(|B_{1/n}| \leqslant 2c(m/n)^{\alpha})\right]^{m}. \tag{22}$$

Здесь мы используем также, что вероятность суммы событий не превосходит суммы вероятностей, а вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей.

Оценим теперь $P(|B_{1/n}| \leqslant x)$:

$$P(|B_{1/n}| \leqslant x) = 2\int_{-x}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \frac{1}{n}}} e^{-\frac{t^2}{2 \cdot \frac{1}{n}}} dt \leqslant \frac{2x\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \tag{23}$$

Объединяя (21)-(23), получим

$$P(G(\alpha, c, \varepsilon)) \leqslant n\left(\frac{4c\left(\frac{m}{n}\right)^{\alpha}\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}\right)^{m} = \left(\frac{4cm^{\alpha}}{\sqrt{2\pi}}\right)^{m} \cdot n^{1+m(1/2-\alpha)} \tag{24}$$

Потребуем теперь, чтобы $m$ было таким, что $m(\alpha - \frac{1}{2}) > 1$. Тогда $1 + m\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) < 0$ и из неравенства (24) в силу произвольности $n > m/\varepsilon$ следует требуемое. $\square$

**Следствие 1.** *Траектории броуновского движения почти наверное являются нигде не дифференцируемыми функциями.*

*Доказательство.* Пусть $D$ — множество таких $\omega$, для которых $B_t(\omega)$ дифференцируемы хотя бы в одной точке $s$. Тогда

$$D \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} G(1, j, 1/k)$$

и вместе со счетной аддитивностью вероятности из теоремы 4.2 следует требуемое. □

## Вопросы и задачи

1. Пусть $U_t$ - процесс, задаваемый формулой

   $$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} \lambda_{2^j+k} Z_{2^j+k} \Delta_{2^j+k}(t).$$

   Доказать, что $U_t = B_t - tB_1$ для $0 \leqslant t \leqslant 1$.

2. Показать, что для введенного в предыдущей задаче процесса имеем $\mathrm{cov}(U_s, U_t) = s(1-t)$ для $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$.

3. Найти $g(t)$ и $h(t)$ так, чтобы процесс $X_t = g(t)B_{h(t)}$ имел ту же функцию ковариации, что и броуновское движение.

# 5 Мартингалы. Непрерывное время

Цель этого параграфа – дать основные определения и используемые далее факты из теории мартингалов, а также проиллюстрировать методы этой теории на самых простых примерах (большая часть приводимых теорем доказывается с использованием существенно более глубоких методов).

**Определение 5.1.** *Фильтрацией (или потоком) $\sigma$-алгебр $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ называется семейство $\sigma$-алгебр $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ таких,что*

$$0 \leqslant s \leqslant t \Longrightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$$

*(т.е. семейство $\{\mathcal{F}_t\}$ является возрастающим).*

**Определение 5.2.** *Действительнозначный случайный процесс* $\{X_t\}_{t \geqslant 0}$ *называется мартингалом на вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *относительно фильтрации* $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geqslant 0}$*, если*

1. *при каждом* $t$ *случайная величина* $X_t$ *является измеримой относительно* $\mathcal{F}_t$ *(процесс* $\{X_t\}_{t \geqslant 0}$ *согласован с фильтрацией* $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geqslant 0}$*;*
2. $\mathsf{E}\,(|X_t|) < \infty$ *при любом* $t \geqslant 0$*;*
3. $\mathsf{E}\,(X_t |\, \mathcal{F}_s) = X_s$ *почти наверное при всех* $0 \leqslant s \leqslant t$*.*

Если в этом определении в свойстве 3) имеет место знак неравенства $\geqslant$ ($\leqslant$), то $\{X_t\}_{t \geqslant 0}$ называется субмартингалом (супермартингалом).

**Пример 1** (У.Кендалл)**.** *Предположим, что человек, поставив будильник на 6 утра, просыпается среди ночи и не может уснуть. Ему лень поднять голову, чтобы взглянуть на часы и он начинает гадать, когда зазвонит будильник. Пусть* $A$ *- случайное событие, состоящее в том, что будильник зазвонит через час после пробуждения. Обозначим через* $X_t$ *случайную величину, равную условной вероятности события* $A$ *через* $t$ *минут после пробуждения, т.е.* $X_t = P(A|\mathcal{F}_t)$*, где* $\mathcal{F}_t$ *- информация о том, звонил ли будильник к моменту* $t$*. Так как* $P(B|\mathcal{F}) = \mathsf{E}\,(\mathbb{I}_B |\, \mathcal{F})$ *для любого события* $B$ *и* $\sigma$*-алгебры* $\mathcal{F}$*, то по свойству условного математического ожидания*

$$\mathsf{E}\,(X_{t+h} |\, \mathcal{F}_t) = \mathsf{E}\,(P(A|\mathcal{F}_{t+h}) |\, \mathcal{F}_t) = \mathsf{E}\,(\mathsf{E}\,(\mathbb{I}_A |\, \mathcal{F}_{t+h}) |\, \mathcal{F}_t) =$$

$= \mathsf{E}\,(\mathbb{I}_A |\, \mathcal{F}_t) = P(A|\mathcal{F}_t) = X_t$ *при любом* $h > 0$*. Таким образом,* $\{X_t\}_{t \geqslant 0}$ *– мартингал.*

Будем считать, что фильтрация $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geqslant 0}$ удовлетворяет обычным условиям, если

1. из $A \subset B, B \in \cup_t \mathcal{F}_t, P(B) = 0$ следует, что $A \in \mathcal{F}_0$;
2. при всех $t \geqslant 0$
$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{s: s > t} \mathcal{F}_s.$$

**Определение 5.3.** *Если* $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geqslant 0}$ *– фильтрация, то случайная величина* $\tau : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ *называется моментом остановки по отношению к* $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geqslant 0}$*, если* $\{\omega : \tau(\omega) \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$ *при всех* $t \geqslant 0$*.*

**Теорема 5.1** (Дж.Л.Дуба о процессе остановки)**.** *Пусть* $\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ – *непрерывный мартингал по отношению к фильтрации* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$*, удовлетворяющей обычным условиям. Если* $\tau$ – *момент остановки по отношению к* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$*, то процесс* $\{X_t = M_{t\wedge\tau}\}_{t\geqslant 0}$ – *также непрерывный мартингал по отношению к* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$.

**Определение 5.4.** *Если процесс* $\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ *согласован с фильтрацией* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$*, то* $\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ *называется локальным мартингалом, если существует неубывающая последовательность* $\{\tau_k\}$ *моментов остановки (она называется локализующей) такая, что* $\lim_{k\to\infty}\tau_k = \infty$ *с вероятностью 1 и при всех натуральных* $k$ *процесс*

$$M_t^{(k)} = M_{t\wedge\tau_k} - M_0$$

– *мартингал по отношению к фильтрации* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$.

**Предложение 5.1.** *Если* $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ – *непрерывный локальный мартингал,* $X_0 = 0$ *и если момент остановки* $\tau = \inf\{t : X_t = A$ *или* $X_t = -B\}$ *то* $\mathsf{E}\,(X_\tau) = 0$ *и, как следствие,*

$$P(X_\tau = A) = \frac{B}{A+B}.$$

**Предложение 5.2.** *Если* $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ – *локальный мартингал и* $\tau$ *- момент остановки, то* $\{Y_t = X_{t\wedge\tau}\}_{t\geqslant 0}$ – *также локальный мартингал.*

*Доказательство.* Прежде всего заметим, что без потери общности можно считать, что $X_0 = 0$ (рассмотрев $X_t' = X_t - X_0$). По определению локального мартингала, существует неубывающая последовательность моментов остановки $\{\tau_k\}$, $\lim_{k\to\infty}\tau_k = \infty$ с вероятностью 1 и такая, что $X_{t\wedge\tau_k}$ – мартингал при всех натуральных $k$. Тогда

$$Y_{t\wedge\tau_k} = X_{(t\wedge\tau)\wedge\tau_k} = X_{(t\wedge\tau_k)\wedge\tau},$$

и, поскольку $\{X_{t\wedge\tau_k}\}_{t\geqslant 0}$ – мартингал, то по теореме Дуба о процессе остановки $\{X_{(t\wedge\tau_k)\wedge\tau}\}_{t\geqslant 0}$ также является мартингалом. Следовательно, $\{Y_{t\wedge\tau_k}\}_{t\geqslant 0}$ – мартингал при всех натуральных $k$, и поскольку $\{\tau_k\}$ – неубывающая последовательность моментов остановки такая, что $\lim_{k\to\infty}\tau_k = \infty$ с вероятностью 1, то по определению $\{X_{t\wedge\tau}\}_{t\geqslant 0}$ – локальный мартингал. $\square$

Приведем теперь два утверждения, содержащие условия, при которых локальный мартингал является мартингалом.

**Предложение 5.3.** *Если $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ – непрерывный локальный мартингал, и $B$ – константа такая, что $|X_t| \leqslant B$ при всех $t \geqslant 0$, то $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ – мартингал.*

*Доказательство.* Опять, как и в ходе доказательства предыдущего утверждения, заметим, что без потери общности можно считать, что $X_0 = 0$ и по определению локального мартингала существует неубывающая последовательность моментов остановки $\{\tau_k\}$, $\lim_{k\to\infty} \tau_k = \infty$ с вероятностью 1, такая, что $X_{t\wedge\tau_k}$ – мартингал при всех натуральных $k$. Возьмем $s \leqslant t$ и заметим, что по свойству мартингала

$$\mathsf{E}\left( X_{t\wedge\tau_k} \middle| \mathcal{F}_s\right) = X_{s\wedge\tau_k}. \tag{25}$$

Так как $\lim_{k\to\infty} \tau_k = \infty$, то $X_{s\wedge\tau_k} \longrightarrow X_s$ и $X_{t\wedge\tau_k} \longrightarrow X_t$. Поскольку при каждом натуральном $k$ справедливо неравенство $|X_{t\wedge\tau_k}| \leqslant B$, то по теореме Лебега А.1 можно перейти к пределу в равенстве (25) при $k \to \infty$. Это дает мартингальное тождество для $X_t$ и завершает доказательство. □

**Предложение 5.4.** *Любой неотрицательный локальный мартингал $\{X_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}, \mathsf{E}\left(|X_0|\right) < \infty$, является супермартингалом, и если*

$$\mathsf{E}\left(X_T\right) = \mathsf{E}\left(X_0\right),$$

*то $\{X_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ – мартингал.*

*Доказательство.* По определению локального мартингала существует неубывающая последовательность моментов остановки $\{\tau_k\}$, $\lim_{k\to\infty} \tau_k = \infty$ с вероятностью 1, такая, что для всех $s, t, 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$

$$\mathsf{E}\left( X_{t\wedge\tau_k} \middle| \mathcal{F}_s\right) = X_{s\wedge\tau_k}.$$

Применяя лемму Фату (см. приложение), получим

$$\mathsf{E}\left( X_t \middle| \mathcal{F}_s\right) \leqslant X_s \tag{26}$$

при всех $s, t, 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$. Таким образом, $\{X_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ – супермартингал.

Беря теперь математические ожидания от обеих частей последнего неравенства, найдем, что $\mathsf{E}\left(X_s\right) \geqslant \mathsf{E}\left(X_t\right)$ для всех $s, t, 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, что, в частности, дает

$$\mathsf{E}\left(X_0\right) \geqslant \mathsf{E}\left(X_s\right) \geqslant \mathsf{E}\left(X_t\right) \geqslant \mathsf{E}\left(X_T\right)$$

для всех $s, t, 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$. Тогда условие $\mathsf{E}\,(X_T) = \mathsf{E}\,(X_0)$ позволяет утверждать, что в последнем неравенстве все знаки неравенства следует заменить равенствами. Возвращаясь к неравенству (26), видим, что предположение о том, что в нем строгое неравенство имеет место на множестве, имеющем положительную вероятность, приводит к строгому неравенству $\mathsf{E}\,(X_s) > \mathsf{E}\,(X_t)$, что противоречит только что доказанному равенству. □

## Вопросы и задачи

1. Пусть $\Omega = [0,1]$, $\sigma$-алгебра $\mathcal{F}$ совпадает с борелевской $\sigma$-алгеброй и вероятностная мера $P$ является мерой Лебега. Пусть $\mathcal{F}_n$ обозначает минимальную $\sigma$-алгебру, содержащую все двоичные интервалы $[i2^{-n}, (i+1)2^{-n}], 1 \leqslant i < 2^n$. Предположим также, что $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ — измеримая по Борелю функция такая, что $\mathsf{E}\,(f^2) < \infty$. Доказать, что последовательность $\{f_n\}, f_n = \mathsf{E}\,(f|\,\mathcal{F}_n)$ является мартингалом и выписать ее в явном виде (через значения функции $f$. (По поводу всех использованных понятий см. приложение).

2. Доказать, что если $\{X_t\}$ — непрерывный мартингал и $\phi$ — выпуклая функция, то $\{Y_t\}, Y_t = \phi(X_t)$ — локальный субмартингал.

3. Доказать, что если $\{X_t\}$ — непрерывный локальный субмартингал такой, что
$$\mathsf{E}\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant T} |X_s|\right) < \infty,$$
то $\{X_t : 0 \leqslant t \leqslant T\}$ — субмартингал.

# 6 Применения теории мартингалов к изучению броуновского движения

В броуновском движении в качестве фильтрации можно взять
$$\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s, s \leqslant t\},$$
однако эта фильтрация имеет недостатки.

Рассмотрим $\mathcal{C}$ — множество случайных событий с нулевой вероятностью таких, что
$$\mathcal{C} \subset \bigcup_{t \leqslant T} \mathcal{F}_t.$$
Обозначим
$$\mathcal{N} = \{A : A \subset B, B \in \mathcal{C}\}.$$
(Не факт, что эти подмножества окажутся в $\mathcal{C}$).

**Определение 6.1.** *Стандартной броуновской фильтрацией называется $\sigma$-алгебра*
$$\mathcal{F}_t = \sigma\left(\sigma\{B_s, s \leqslant t\} \cup \mathcal{N}\right).$$

Построенная фильтрация удовлетворяет обычным условиям, поэтому в дальнейшем можно использовать результаты предыдущего параграфа.

## 6.1 Примеры мартингалов, связанных с броуновским движением

1. Броуновское движение является примером мартингала. Действительно, при $s < t$
$$\mathsf{E}\left(B_t \middle| \mathcal{F}_s\right) = \mathsf{E}\left(B_t - B_s + B_s \middle| \mathcal{F}_s\right) = \mathsf{E}\left(B_t - B_s\right) + B_s = B_s.$$

2. Следующий пример мартингала – $M_t = B_t^2 - t$. В самом деле, при $s < t$
$$\begin{aligned} \mathsf{E}\left(B_t^2 - t \middle| F_s\right) &= \mathsf{E}\left((B_t - B_s)^2 + 2(B_t - B_s)B_s + B_s^2 \middle| F_s\right) - t = \\ &= \mathsf{E}\left((B_t - B_s)^2\right) + 2B_s\mathsf{E}\left(B_t - B_s\right) + B_s^2 - t = \\ &= t - s + B_s^2 - t = B_s^2 - s = M_s. \end{aligned}$$

3. Геометрическое броуновское движение
$$X_t = \exp\left(\alpha B_t - \frac{\alpha^2 t}{2}\right)$$

– также мартингал, причем именно оно встречается в дальнейших финансовых приложениях. Действительно,

$$\mathsf{E}\left( X_t \middle| \mathcal{F}_s\right) = \mathsf{E}\left(\exp(\alpha B_t)\cdot\exp\left(-\frac{\alpha^2 t}{2}\right)\middle| \mathcal{F}_s\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{\alpha^2 t}{2}\right)\cdot \mathsf{E}\left(\exp(\alpha B_t)| F_s\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{\alpha^2 t}{2}\right)\cdot \mathsf{E}\left(\exp(\alpha(B_t - B_s))\cdot \exp(\alpha(B_s))| F_s\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{\alpha^2 t}{2}\right)\cdot \mathsf{E}\left(\exp(\alpha(B_t - B_s))\right)\cdot \exp(\alpha B_s). \qquad (27)$$

Пусть $y \sim N(0, \sigma^2)$. Найдем $\mathsf{E}\,(\exp \alpha y)$:

$$\mathsf{E}\left(\exp(\alpha y)\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha x}\cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}+\alpha x} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}+\alpha x - \frac{\alpha^2\sigma^2}{2}}\cdot e^{\frac{\alpha^2\sigma^2}{2}} dx = \frac{e^{\frac{\alpha^2\sigma^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma} - \frac{\alpha\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2} dx = e^{\frac{\alpha^2\sigma^2}{2}}.$$

Подставляя полученное равенство в (27), найдем

$$\mathsf{E}\left( X_t \middle| \mathcal{F}_s\right) = e^{-\frac{\alpha^2 t}{2}}\cdot e^{\frac{\alpha^2 (t-s)}{2}}\cdot e^{\alpha B_s} = \exp\left(\alpha B_s - \frac{\alpha^2 s}{2}\right) = X_s.$$

## 6.2 Время разорения

**Теорема 6.1** (Время разорения и его ожидание для броуновского движения)**.** *Обозначим*

$$\tau = \inf\{t : B_t = A \text{ *или* } B_t = -B\}.$$

*Тогда*

$$P(\tau < \infty) = 1; \quad P(B_\tau = A) = \frac{B}{A+B}; \quad \mathsf{E}\,(\tau) = AB.$$

*Доказательство.* Заметим, что для всех $n \geqslant 0$

$$P(|B_{n+1} - B_n| > A + B) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{A+B}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \varepsilon > 0.$$

Если $\tau = \infty$, то ни одно из совокупности независимых событий

$$\{\omega : |B_{n+1} - B_n| > A + B\}$$

не может иметь места. Поэтому

$$P(\tau = \infty) \leqslant \prod_{k=1}^{n} P\left(|B_{k+1} - B_k| \leqslant A + B\right) = (1 - \varepsilon)^n,$$

и в силу произвольности $n$ отсюда $P(\tau = \infty) = 0$. Так как $B_t$ — мартингал, а $\tau$ — момент остановки, то по теореме Дуба о процессе остановки $B_{t\wedge\tau}$ — также мартингал и

$$\mathsf{E}\left(B_{t\wedge\tau}\right) = \mathsf{E}\left(B_{0\wedge\tau}\right) = \mathsf{E}\left(B_0\right) = 0. \tag{28}$$

Так как

$$|B_{t\wedge\tau}| \leqslant \max(A, B),$$

то по теореме Лебега A.1 получаем

$$0 = \lim_{t\to+\infty} \mathsf{E}\left(B_{t\wedge\tau}\right) = \mathsf{E}\left(\lim_{t\to+\infty} B_{t\wedge\tau}\right) =$$

$$= \mathsf{E}\left(B_\tau\right) = A \cdot P(B_\tau = A) - B \cdot P(B_\tau = -B), \tag{29}$$

откуда с учетом (28) получаем искомое.

Конечность моментов доказывается по той же схеме, что и в дискретном случае. Далее рассматривается мартингал $M_t = B_t^2 - t$ и аналогично дискретному случаю получаем утверждение теоремы. $\square$

## 6.3 Время достижения некоторого уровня

Обозначим

$$\tau_a = \inf\{t : B_t = a\}.$$

**Теорема 6.2.** *При любых действительных $a$ и $\lambda > 0$*

$$P(\tau_a < \infty) = 1,$$

$$\mathsf{E}\left(\exp(-\lambda\tau_a)\right) = \exp(-|a|\sqrt{2\lambda}).$$

*Доказательство.* При любых действительных $a$ и $b > 0$

$$P(\tau_a < \infty) \geqslant P(B_{\tau_a \wedge \tau_{-b}} = a) = \frac{b}{a+b}.$$

Так как

$$\lim_{b\to\infty} \frac{b}{a+b} = 1,$$

то

$$P(\tau_a < \infty) = 1.$$

Пусть теперь $a > 0$. Рассмотрим мартингал (см. пример 3 выше)

$$X_t = \exp\left(\alpha B_t - \frac{\alpha^2 t}{2}\right), \alpha > 0. \tag{30}$$

По теореме Дуба о процессе остановки из предыдущего параграфа $X_{t\wedge\tau_a}$ также будет являться мартингалом. Тогда по свойству мартингалов

$$\mathsf{E}\left(X_{t\wedge\tau_a}\right) = \mathsf{E}\left(X_{0\wedge\tau_a}\right) = \mathsf{E}\left(X_0\right) = 1.$$

Кроме того,

$$|X_{t\wedge\tau_a}| = e^{\alpha B_{t\wedge\tau_a} - \frac{\alpha^2(t\wedge\tau_a)}{2}} \leqslant e^{\alpha a},$$

следовательно, по теореме Лебега A.1

$$1 = \lim_{t\to\infty} \mathsf{E}\left(X_{t\wedge\tau_a}\right) = \mathsf{E}\left(\lim_{t\to\infty} X_{t\wedge\tau_a}\right) = \mathsf{E}\left(X_{\tau_a}\right) = e^{\alpha a}\cdot \mathsf{E}\left(\exp\left(-\frac{\alpha^2\tau_a}{2}\right)\right).$$

Положим здесь

$$\alpha = \sqrt{2\lambda},$$

тогда получим

$$\mathsf{E}\left(\exp(-\lambda\tau_a)\right) = \exp(-a\sqrt{2\lambda}).$$

Если $a < 0$, то берем в (30) $\alpha < 0$, $\alpha = -\sqrt{2\lambda}$. □

**Следствие 1.** *При любом действительном $a \neq 0$*

$$\mathsf{E}\,(\tau_a) = \infty.$$

*Доказательство.* Для любого $b > 0$, воспользовавшись теоремой 6.1?, имеем

$$\tau_a \geqslant \tau_a \wedge \tau_{-b} \Rightarrow \mathsf{E}\,(\tau_a) \geqslant \mathsf{E}\,(\tau_a \wedge \tau_{-b}) = ab.$$

Устремляя $b \to \infty$, получаем искомое. □

**Следствие 2.** *Для любого действительного $a \neq 0$*

$$\mathsf{E}\left(\tau_a^{-1}\right) = a^{-2}.$$

*Доказательство.* Заметим, что

$$t^{-1} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t\lambda} d\lambda.$$

Тогда, используя теорему Фубини A.3 и теорему 6.2, получим

$$\mathsf{E}\left(\tau_a^{-1}\right) = \int\limits_0^{+\infty} \mathsf{E}\left(\exp(-\lambda\tau_a)\right) d\lambda = \int\limits_0^{+\infty} \exp(-|a|\sqrt{2\lambda}) d\lambda =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \exp(-u)\frac{u}{a^2} du = \frac{1}{a^2}\int\limits_0^{+\infty} u de^{-u} = \frac{1}{a^2} u e^{-u}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{a^2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-u} du = \frac{1}{a^2}.$$

□

## Вопросы и задачи

1. Пусть

$$Y_t = \begin{cases} 0, & \text{при } t = 0 \\ tB_{1/t}, & \text{при } t > 0, \end{cases}$$

   — случайный процесс, называемый обращенным по времени броуновским движением. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ процесс, задаваемый равенством $\{X_t = Y_t - Y_\varepsilon : t \geqslant \varepsilon\}$ — мартингал.

2. Проверить, что для определенного в предыдущей задаче процесса $\{Y_t\}$ при любых $0 < s \leqslant t$ выполнены равенства $\mathsf{E}\left(Y_t - Y_s\right) = 0, \mathsf{E}\left((Y_t - Y_s)^2\right) = t - s$.

3. Использовать мартингал геометрического броуновского движения для вычисления $\phi(\lambda) = \mathsf{E}\left(\exp(-\lambda\tau)\right)$, где $\tau = \inf\{t : B_t = A$ или $B_t = -A\}$. С помощью полученного результата вычислить $\mathsf{E}\left(\tau^2\right)$.

# 7 Стохастические интегралы

## 7.1 Построение стохастического интеграла(интеграла Ито)

Рассмотрим $\sigma$-алгебру $\mathcal{F}_T \times \mathcal{B}$ — наименьшую $\sigma$-алгебру, порожденную наборами $(A, B)$, где $A \in \mathcal{F}_T$, $B \in \mathcal{B}$, $\mathcal{F}_t$ — стандартная броуновская фильтрация, $\mathcal{B}$ — борелевская $\sigma$-алгебра на $[0, T]$ (см. приложение A.1).

Функция $f(\omega, t)$ предполагается измеримой (см. приложение A.1) относительно $\mathcal{F}_T \times \mathcal{B}$ (обозначается $f \in \mathcal{F}_T \times \mathcal{B}$). Кроме того, предполагаем, что функция $f$ — предсказуема, т. е. при всех $t \in [0, T]$

$$f(\omega, t) \in \mathcal{F}_t,$$

другими словами, $f$ полностью определяется информацией к моменту $t$.

Класс $\mathcal{H}^2[0, T]$ состоит из всех измеримых предсказуемых функций $f$ таких, что

$$\mathsf{E}\left(\int\limits_0^T f^2(\omega, t)dt\right) < \infty.$$

Норма в $\mathcal{H}^2[0, T]$ определяется как

$$\|f\|_{\mathcal{H}^2} = \|f\|_{L^2(dP\times dt)} = \left(\mathsf{E}\left(\int\limits_0^T f^2(\omega, t)dt\right)\right)^{1/2}$$

Определим сначала стохастический интеграл для класса функций $\mathcal{H}_0^2[0, T]$, т. е. функций, представимых в виде

$$f(\omega, t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega)\mathbb{I}_{(t_i, t_{i+1}]}(t),$$

где $t_i = \frac{iT}{n}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $a_i \in \mathcal{F}_{t_i}$ (т. е. полностью определены к моменту $t_i$), $\mathsf{E}\left(a_i^2\right) < \infty$ (из чего следует конечность $\|f\|$).

Для таких функций интеграл Ито определяется как сумма

$$I(f) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega)\left(B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)\right).$$

**Лемма 7.1** (Изометрия Ито в $\mathcal{H}_0^2[0,T]$)**.** *Если* $f \in \mathcal{H}_0^2[0,T]$, *то*

$$\|f\|_{L^2(dP\times dt)} = \|I(f)\|_{L^2(dP)}.$$

*Доказательство.* По определению

$$\|f\|^2_{L^2(dP\times dt)} = \mathsf{E}\left(\int_0^T f^2(\omega,t)dt\right) = \mathsf{E}\left(\int_0^T \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega)\mathbb{I}_{(t_i,t_{i+1}]}\right)^2 dt\right) =$$

$$= \mathsf{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i^2(\omega)(t_{i+1}-t_i)\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathsf{E}\left(a_i^2(\omega)\right)(t_{i+1}-t_i). \tag{31}$$

С другой стороны,

$$\|I(f)\|^2_{L^2(dP)} = \mathsf{E}\left(\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega)\left(B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)\right)\right)^2\right) =$$

$$= \mathsf{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} a_i(\omega)a_j(\omega)\left(B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)\right)\left(B_{t_{j+1}}(\omega) - B_{t_j}(\omega)\right)\right) =$$

(учитывая, что для $j > i$ случайная величина $B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$ не зависит от $\mathcal{F}_{t_i}$ и $\mathcal{F}_{t_j}$ по свойству броуновского движения, а также свойства математического ожидания и то,что $\mathsf{E}\left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right) = 0$)

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \mathsf{E}\left(a_i^2(\omega)\right)\mathsf{E}\left(\left(B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)\right)^2\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathsf{E}\left(a_i^2(\omega)\right)(t_{i+1}-t_i). \tag{32}$$

Сравнивая (31) и (32), получим требуемое.

□

**Лемма 7.2** (об аппроксимации)**.** *Для любой $f \in \mathcal{H}^2[0,T]$ найдется последовательность $\{f_n\} \subset \mathcal{H}_0^2[0,T]$ такая, что*

$$\|f_n - f\|_{L^2(dP\times dt)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Для функций $f$ из $\mathcal{H}^2$ интеграл Ито строится как предел в среднеквадратичном

$$I(f) := \lim_{n\to\infty} I(f_n),$$

т. е.

$$\|I(f) - I(f_n)\|_{L^2(dP)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

где $\{f_n\}$ — последовательность из леммы 7.2 об аппроксимации.

Проверим корректность определения, а именно установим сходимость и покажем независимость значения интеграла от выбора аппроксимирующей последовательности.

Возьмем существующую по лемме 7.2 последовательность $\{f_n\}$, т.е. $f_n \xrightarrow{L^2} f$. Так как $\{f_n\}$ сходится, то она фундаментальна, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \quad \forall n > N_\varepsilon \quad \forall m > N_\varepsilon \quad \|f_n - f_m\|_{L^2(dP\times dt)} < \varepsilon.$$

По лемме об изометрии отсюда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \quad \forall n > N_\varepsilon \quad \forall m > N_\varepsilon \quad \|I(f_n) - I(f_m)\|_{L^2(dP)} < \varepsilon,$$

т.е. последовательность $\{I(f_n)\}$ фундаментальна в $L^2(dP)$. Из полноты пространства $L^2(dP)$ (см. приложение A.1) получаем существование предела в $L^2(dP)$, и, значит, $I(f)$ определен.

Предположим, что есть еще одна последовательность $\{\widetilde{f_n}\} \xrightarrow{L^2} f$. Тогда $\|f_n - \widetilde{f}_n\|_{L^2(dP\times dt)} \to 0$, а, значит, по лемме об изометрии $\|I(f_n) - I(\widetilde{f}_n)\|_{L^2(dP)} \to 0$, что и требовалось.

Определенный таким образом интеграл $I(f)$ обозначается через

$$\int\limits_0^T f(\omega,t)dB_t = I(f).$$

По определению,

$$\int\limits_0^t f(\omega,s)dB_s = \int\limits_0^T m_t(s) f(\omega,s)dB_s,$$

где $m_t(s)$ — «срезка»,

$$m_t(s) = \mathbb{I}_{[0,t]}(s).$$

Можно доказать, что существует такой мартингал $\{X_t\}_{0 \leqslant t \leqslant T}$, что

$$P\left(X_t = \int\limits_0^t f(\omega, s) dB_s\right) = 1.$$

Далее под обозначением

$$\int\limits_0^t f(\omega, s) dB_s$$

будет пониматься именно этот мартингал.

Расширим теперь класс функций, для которых определен стохастический интеграл. Через $\mathcal{L}^2_{loc}$ будем обозначать класс измеримых и предсказуемых функций $f : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ таких, что

$$P\left(\int_0^T f^2(\omega, t) dt < \infty\right) = 1.$$

**Определение 7.1.** *Неубывающая последовательность моментов остановки $\{\nu_n\}$ называется $\mathcal{H}^2[0, T]$-локализующей для $f$, если*

$$f_n(\omega, t) = f(\omega, t)\mathbb{I}_{\{t \leqslant \nu_n\}} \in \mathcal{H}^2[0, T]$$

*при всех натуральных $n$ и*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega : \nu_n = T\}\right) = 1.$$

Легко видеть, что для $f \in \mathcal{L}^2_{loc}$ моменты остановки

$$\tau_n := \inf\left\{s : \int_0^s f^2(\omega, t) dt \geqslant n \text{ или } s \geqslant T\right\}$$

образуют $\mathcal{H}^2[0, T]$-локализующую последовательность.

Пусть теперь $f \in \mathcal{L}^2_{loc}$ и $\{\nu_n\}$ — $\mathcal{H}^2[0, T]$-локализующая последовательность. Положим

$$g(\omega, s) = f(\omega, s)\mathbb{I}_{\{s \leqslant \nu_n(\omega)\}}.$$

Обозначим через $\{X_{t,n}\}$ непрерывный мартингал, равный интегралу Ито

$$\int_0^t g(\omega, s)dB_s.$$

Интеграл Ито от $f \in \mathcal{L}^2_{loc}$ определяется как предел процессов $\{X_{t,n}\}$ при $n \to \infty$, т.е. такой случайный процесс $\{X_t\}$, что при всех $t \in [0, T]$

$$P\left(X_t = \lim_{n\to\infty} X_{t,n}\right) = 1.$$

Далее под обозначением

$$\int\limits_0^t f(\omega, s)dB_s$$

будет пониматься именно этот процесс. При этом можно доказать, что данное определение корректно, т.е. интеграл определен и не зависит от выбора локализующей последовательности. Кроме того, оказывается, что для каждой функции $f \in \mathcal{L}^2_{loc}$ существует непрерывный локальный мартингал, совпадающий с только что определенным интегралом почти наверное. В дальнейшем

$$\int\limits_0^t f(\omega, s)dB_s$$

для $f \in \mathcal{L}^2_{loc}$ будет считаться локальным мартингалом. При этом локализующие последовательности в смысле определений локального мартингала и в смысле определения пространства $\mathcal{L}^2_{loc}$ совпадают.

Приведем несколько результатов, позволяющих сблизить понятия стохастического и обычного интегралов. Заметим впрочем, что в силу доказанной в параграфе 4 недифференцируемости траекторий броуновского движения стохастический интеграл не может пониматься как обычный интеграл (даже как интеграл Римана-Стилтьеса), т.е. обозначение $dB_t$ не несет никакого смысла, связанного с обычным дифференциалом.

**Теорема 7.1** (Риманово представление)**.** *Для любой непрерывной действительной функции $f$*

$$\int_0^T f(B_s)dB_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f\left(B_{t_{i-1}}\right)\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right),$$

*где* $t_i = \frac{iT}{n}, 0 \leqslant i \leqslant n$, *и сходимость понимается в смысле сходимости по вероятности (см. приложение).*

**Теорема 7.2** (Гауссовы интегралы)**.** *Если функция* $f$ *непрерывна на* $[0,T]$, *то процесс*

$$X_t = \int_0^t f(s)dB_s$$

*— гауссовский с функцией среднего, тождественно равной нулю и с функцией ковариации*

$$\operatorname{cov}(X_s, X_t) = \int_0^{s\wedge t} f^2(u)du.$$

*При этом*

$$\int_0^T f(s)dB_s = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(t_i^*)\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)$$

*для* $t_i = \frac{iT}{n}, 0 \leqslant i \leqslant n$ *и любого выбора точек* $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$.

## 7.2 Пример явного вычисления интеграла Ито

Покажем, что

$$\int\limits_0^t B_s dB_s = \frac{B_t^2}{2} - \frac{t}{2}.$$

*Доказательство.* Проверим сначала, что математическое ожидание и дисперсия обеих частей совпадают. Прежде всего, используя свойство мартингала для $X_t = \int_0^t B_s dB_s$, имеем

$$\mathsf{E}\left(\int\limits_0^t B_s dB_s\right) = \mathsf{E}\left(X_t\right) = \mathsf{E}\left(X_0\right) = 0 = \mathsf{E}\left(\frac{B_t^2}{2} - \frac{t}{2}\right).$$

Далее,

$$\mathsf{V}\left(\int\limits_0^t B_s dB_s\right) = \mathsf{E}\left(\left(\int\limits_0^t B_s dB_s\right)^2\right) = \left\|\int\limits_0^t B_s dB_s\right\|^2_{L^2(dP)} =$$

$$= \|B_s\|^2_{L^2(dP\times dt)} = \mathsf{E}\left(\int\limits_0^t B_s^2 ds\right) = \int\limits_0^t \mathsf{E}\left(B_s^2\right)ds = \int\limits_0^t s ds = \frac{t^2}{2}.$$

С другой стороны,

$$\mathsf{V}\left(\frac{B_t^2}{2}-\frac{t}{2}\right)=\frac{1}{4}\mathsf{V}\left(B_t^2\right)=\frac{1}{4}\left(\mathsf{E}\left(B_t^4\right)-t^2\right).$$

Следующая цепочка выкладок

$$\mathsf{E}\left(B_t^4\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^4e^{-\frac{x^2}{2t}}dx=-\frac{t}{\sqrt{2\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^3de^{-\frac{x^2}{2t}}=$$
$$=\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2\pi}}\left(-x^3e^{-\frac{x^2}{2t}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2t}}3x^2dx\right)=3t\mathsf{E}\left(B_t^2\right)=3t^2 \quad (33)$$

доказывает, что

$$\mathsf{V}\left(\frac{B_t^2}{2}-\frac{t}{2}\right)=\frac{1}{4}(3t^2-t^2)=\frac{t^2}{2}.$$

Согласно определению, мы должны приблизить $f(\omega,s)=B_s(\omega)$ функциями из $\mathcal{H}_0^2$. Возьмем в качестве такой приближающей последовательности следующую:

$$f_n(\omega,s)=\sum_{i=0}^{n-1}B_{t_i}(\omega)\mathbb{I}_{(t_i,t_{i+1}]}(s)$$

Так как $\mathsf{E}\left(B_{t_i}^2\right)<\infty$, то $f_n\in\mathcal{H}_0^2[0,T]$. Проверим, что $f_n\xrightarrow{L^2}f$ :

$$\|f-f_n\|^2_{L^2(dP\times dt)}=\|\sum_{i=0}^{n-1}(B_s-B_t)(\omega)\mathbb{I}_{(t_i,t_{i+1}]}(s)\|^2_{L^2(dP\times dt)}=$$
$$=\mathsf{E}\left(\int\limits_0^T\left(\sum_{i=0}^{n-1}(B_s-B_{t_i})\,\mathbb{I}_{(t_i,t_{i+1}]}\right)^2ds\right)=\mathsf{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}(B_s-B_{t_i})^2ds\right)=$$
$$=\sum_{i=0}^{n-1}\mathsf{E}\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}(B_s-B_{t_i})^2ds\right)=\sum_{i=0}^{n-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\mathsf{E}\left((B_s-B_{t_i})^2\right)ds=\sum_{i=0}^{n-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}(s-t_i)ds=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)^2=\frac{1}{2}\frac{T^2}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Осталось посчитать интеграл

$$\int\limits_0^t f_n(\omega, s)dB_s = \int\limits_0^T m_t \cdot \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i}\mathbb{I}_{(t_i,t_{i+1}]}(t)dB_s.$$

Обозначим

$$K_n(t) = \max\left\{i : \frac{(i+1)T}{n} \leqslant t\right\}.$$

Тогда

$$\int\limits_0^T m_t \cdot \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i}\mathbb{I}_{(t_i,t_{i+1}]}(t)dB_s =$$
$$= \sum_{i=0}^{K_n(t)} B_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + B_{t_{K_n(t)+1}} \cdot (B_t - B_{t_{K_n(t)+1}}).$$

Нужно доказать, что это выражение стремится к $\frac{B_t^2}{2} - \frac{t}{2}$ по норме $L^2(dP)$:

$$\|B_{t_{K_n(t)+1}}(B_t - B_{t_{K_n(t)+1}})\|^2_{L^2(dP)} =$$
$$= \mathsf{E}\left(B^2_{t_{K_n(t)+1}}\left(B_t - B_{t_{K_n(t)+1}}\right)^2\right) =$$
$$= t_{K_n(t)+1} \cdot (t - t_{K_n(t)+1}) \leqslant T \cdot \frac{T}{n} = \frac{T^2}{n} \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

Покажем, что оставшаяся сумма стремится к $\frac{B_t^2}{2} - \frac{t}{2}$.

$$\sum_{i=0}^{K_n(t)} B_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = \sum_{i=0}^{K_n(t)} \left[\frac{1}{2}\left(B^2_{t_{i+1}} - B^2_{t_i}\right) - \frac{1}{2}\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)^2\right] =$$
$$= \frac{1}{2}B^2_{t_{K_n(t)+1}} - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{K_n(t)} (B_{t_{i+1}-B_{t_i}})^2.$$

Так как $t_{K_n(t)+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} t$, то первое слагаемое стремится к $\frac{B_t^2}{2}$ почти наверное в силу непрерывности траекторий броуновского движения. Из сходимости почти наверное следует сходимость в $L^2$ (см. приложение A.1).

Установим, что

$$\sum_{i=0}^{K_n(t)} \left[(B_{t_i} - B_{t_i})^2 - (t_{i+1} - t_i)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad (\text{ в смысле } L^2(dP)). \tag{34}$$

Поскольку

$$\sum_{i=0}^{K_n(t)} (t_{i+1} - t_i) = t_{K_n(t)+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} t,$$

то из этого будет следовать требуемое. Докажем (34):

$$\left\| \sum_{i=0}^{K_n(t)} \left[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - (t_{i+1} - t_i)\right] \right\|^2_{L^2(dP)} =$$

$$= \mathsf{E}\left( \left( \sum_{i=0}^{K_n(t)} \left[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - (t_{i+1} - t_i)\right] \right)^2 \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{K_n(t)} \mathsf{E}\left( \left( (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - \frac{T}{n} \right)^2 \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{K_n(t)} \mathsf{E}\left( (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^4 - \frac{2T}{n}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 + \frac{T^2}{n^2} \right) =$$

$$(\text{с учетом (33)}) \qquad = \sum_{i=0}^{K_n(t)} \left( 3\frac{T^2}{n^2} - 2\frac{T^2}{n^2} + \frac{T^2}{n^2} \right) \leqslant \frac{2T^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

$\square$

## Вопросы и задачи

1. Использовать изометрию Ито для вычисления дисперсий стохастических интегралов

$$\int_0^t |B_s|^{\frac{1}{2}} dB_s$$

и

$$\int_0^t (B_s + s)^2 dB_s.$$

2. Интегралы

$$I_1 = \int\limits_0^t B_s ds \text{ и } I_2 = \int\limits_0^t B_s^2 ds$$

не являются стохастическими интегралами, а являются обычными интегралами (Римана) при каждом фиксированном значении $\omega$, т.е. являются случайными процессами. Найти их функции среднего и ковариации.

3. При любом фиксированном $t > 0$ случайная величина $B_t$ имеет ту же функцию распределения, что и $X_t = \sqrt{t}Z$, где $Z \sim N(0,1)$, но эти процессы совсем разные. Проверьте, что процессы

$$U_t = \int_0^t f(B_s)ds \text{ и } V_t = \int_0^t f(X_s)ds$$

имеют совпадающие функции средних, но, вообще говоря, разные функции ковариации.

# 8 Формулы Ито

## 8.1 Простейший вариант формулы Ито

**Теорема 8.1.** *Если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет непрерывную вторую производную, то*

$$f(B_t) = f(0) + \int\limits_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int\limits_0^t f''(B_s)ds \tag{35}$$

*или, в дифференциальной символической записи,*

$$df(B_t) = f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}f''(B_t)dt.$$

В качестве примера на применение формулы Ито снова найдем стохастический интеграл $\int\limits_0^t B_s dB_s$. Чтобы применить формулу (35), нужно найти функцию $f$ такую, чтобы искомый стохастический интеграл совпал с единственным стохастическим интегралом, присутствующим в формуле (35), т.е.

$$f'(x) = x,$$

откуда
$$f(x) = \frac{x^2}{2}$$
и
$$f''(x) = 1.$$
Тогда формула (35) запишется так:
$$\frac{B_t^2}{2} = \int\limits_0^t B_s dB_s + \frac{1}{2}\int\limits_0^t ds,$$
откуда получаем
$$\int\limits_0^t B_s dB_s = \frac{B_t^2}{2} - \frac{t}{2}.$$

*Доказательство.* Доказательство формулы (35) проведем, следуя работе [6]. Сначала докажем дискретный вариант.

Пусть $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$— произвольная функция, определим ее трапецеидальные суммы как
$$g(k) = \varepsilon_k \left\{ \frac{1}{2} f(0) + \sum_{j=1}^{|k|-1} f(\varepsilon_k j) + \frac{1}{2} f(k) \right\} \quad (k \in \mathbb{Z}), \tag{36}$$
где $\varepsilon_k = \operatorname{sign} k$.

**Лемма 8.1.** *Для любой последовательности $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}, X_i = \pm 1$, справедливо следующее представление для $S_n = X_1 + \ldots + X_n, n \geqslant 1$ $(S_0 = 0)$ :*
$$g(S_n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(S_i) X_{i+1} + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(S_{i+1}) - f(S_i)}{X_{i+1}} \quad (n \geqslant 1),$$
*где $g(S_n)$ — трапецеидальная сумма, определенная в (36).*

*Доказательство.* Рассмотрим несколько случаев:

1. $\operatorname{sign} S_i = \operatorname{sign} S_{i+1} = 1$, $X_{i+1} = 1$. Тогда

$$g(S_{i+1}) - g(S_i) = \frac{1}{2}f(0) + \sum_{j=1}^{S_{i+1}-1} f(j) + \frac{1}{2}f(S_{i+1}) -$$

$$- \left(\frac{1}{2}f(0) + \sum_{j=1}^{S_i-1} f(j) + \frac{1}{2}f(S_i)\right) = f(S_{i+1}-1) + \frac{1}{2}f(S_{i+1}) - \frac{1}{2}f(S_i) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(f(S_{i+1}) + f(S_i)\right), \text{ так как } S_{i+1} - 1 = S_i.$$

2. $\operatorname{sign} S_i = \operatorname{sign} S_{i+1} = 1$, $X_{i+1} = -1$. Здесь

$$g(S_{i+1}) - g(S_i) = \frac{1}{2}f(S_{i+1}) - f(S_i - 1) - \frac{1}{2}f(S_i) =$$

$$- \frac{1}{2}\left(f(S_{i+1}) + f(S_i)\right), \text{ так как } S_{i+1} + 1 = S_i.$$

3. $\operatorname{sign} S_i = S_i = 1$, $S_{i+1} = 0$, $X_{i+1} = -1$. В этом случае

$$g(S_{i+1}) - g(S_i) = 0 - \left(\frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(1)\right) = -\frac{1}{2}\left(f(S_{i+1}) + f(S_i)\right).$$

Аналогично разбираются и другие случаи, объединяя которые в одну формулу, получим

$$g(S_{i+1}) - g(S_i) = X_{i+1}\left(\frac{1}{2}f(S_{i+1}) + \frac{1}{2}f(S_i)\right) =$$

$$= f(S_i)X_{i+1} + \frac{1}{2}\frac{f(S_{i+1}) - f(S_i)}{X_{i+1}},$$

где использовано то, что $X_{i+1} = \pm 1$.

Суммируя полученные равенства, получим требуемое. $\square$

Для вывода формулы Ито потребуются модифицированные трапецеидальные суммы

$$g_{n,t}(k) = \varepsilon_k \sqrt{\frac{t}{n}} \left\{ \frac{1}{2}f(0) + \sum_{j=1}^{|k|-1} f(\varepsilon_k \sqrt{\frac{t}{n}} j) + \frac{1}{2} f(\sqrt{\frac{t}{n}} k) \right\}, \tag{37}$$

где $k \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon_k = \operatorname{sign} k$, $t > 0$, $n = 1, 2, \ldots$.

**Лемма 8.2.** *Для любой последовательности $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}, X_i = \pm 1$, справедливо следующее представление для $S_n$, определенной в предыдущей лемме:*

$$g_{n,t}(S_n) = \sum_{i=0}^{n-1} f\Big(\sqrt{\frac{t}{n}}S_i\Big)\sqrt{\frac{t}{n}}X_{i+1} + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(\sqrt{\frac{t}{n}}S_{i+1}) - f(\sqrt{\frac{t}{n}}S_i)}{\sqrt{\frac{t}{n}}X_{i+1}}\frac{t}{n} \quad (n \geqslant 1), \tag{38}$$

*где $g_{n,t}(S_n)$ — трапецеидальная сумма, определенная в (37).*

Лемма доказывается вполне аналогично предыдущей и ее доказательство оставляем читателю.

Вернемся к доказательству формулы Ито (35).

Зафиксируем $t > 0$ и пусть $n = 1, 2, \ldots$. Возьмем $\tau_{n,0} = 0$ и

$$\tau_{n,i} = \inf\left\{s : s > \tau_{n,i}, |B_s - B_{\tau_{n,i-1}}| \geqslant \sqrt{\frac{t}{n}}\right\} \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

где $\{B_s\}_{s\geqslant 0}$ — стандартное броуновское движение. Тогда в силу независимости приращения $B_s - B_{\tau_{n,i-1}}$ от предыдущих значений время $\tau_{n,i} - \tau_{n,i-1}$ совпадает с временем достижения уровней $\pm\sqrt{\frac{t}{n}}$ и в силу теоремы 6.2

$$\mathsf{E}\,(\tau_{n,i} - \tau_{n,i-1}) = \sqrt{\frac{t}{n}} \cdot \sqrt{\frac{t}{n}} = \frac{t}{n}.$$

Более того, можно доказать, что

$$\max_{0\leqslant i\leqslant n} \mid \tau_{n,i} - \frac{it}{n} \mid \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{по вероятности.} \tag{39}$$

Далее, из независимости приращений броуновского движения следует, что при любом $n \geqslant 1$ случайные величины

$$X_i = X_{n,i} = \sqrt{\frac{n}{t}}\left(B_{\tau_{n,i}} - B_{\tau_{n,i-1}}\right) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

также независимы и $P(X_i = +1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$. Более того, по определению $X_i$ и $S_i$

$$\sqrt{\frac{t}{n}}S_j = \sqrt{\frac{t}{n}}\sum_{i=1}^{j} X_i = B_{\tau_{n,j}}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{40}$$

Соотношение (39) и свойство (равномерной) непрерывности броуновского движения на $[0,1]$ влекут, что

$$\max_{0\leqslant i\leqslant n} \mid B_{\tau_{n,i}} - B_{\frac{it}{n}} \mid \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{по вероятности.} \tag{41}$$

Применим теперь лемму 8.2 к только что определенным случайным величинам $X_i$, тогда левая часть равенства (38) запишется так:

$$g_{n,t}(S_n) = \operatorname{sign}(S_n)\sqrt{\frac{t}{n}}\left\{\frac{1}{2}f(0) + \sum_{j=1}^{|S_n|-1} f(\operatorname{sign}(S_n)\sqrt{\frac{t}{n}}j) + \frac{1}{2}f(\sqrt{\frac{t}{n}}S_n)\right\}.$$

Правая часть полученного равенства есть не что иное, как общая формула трапеций, примененная к приближенному вычислению интеграла Римана

$$\int_0^{B_{\tau_{n,n}}} f(s)ds,$$

поэтому (см.[3])

$$\left|g_{n,t}(S_n) - \int_0^{B_{\tau_{n,n}}} f(s)ds\right| = \left(\sqrt{\frac{t}{n}}\right)^2 \frac{1}{2}\left|\int_0^{B_{\tau_{n,n}}} f''(s)y_2^*\left(-s\frac{n}{t}\right)ds\right|, \tag{42}$$

где $y_2^*(x)$ — 1-периодическая функция, совпадающая с $x^2-x$ на $[0,1]$. Так как из (41) следует, что $B_{\tau_{n,n}} \longrightarrow B_t$ при $n\to\infty$ по вероятности, то из (42) следует, что

$$g_{n,t}(S_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^{B_t} f(s)ds \tag{43}$$

по вероятности. Второе слагаемое в правой части равенства (38) может быть записано, по (40), как

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(B_{\tau_{n,i+1}}) - f(B_{\tau_{n,i}})}{B_{\tau_{n,i+1}} - B_{\tau_{n,i}}}\frac{t}{n}. \tag{44}$$

Из (40) следует, что $B_{\tau_{n,i+1}} - B_{\tau_{n,i}}$ принимает значения $\pm\sqrt{\frac{t}{n}}$ с вероятностями $\frac{1}{2}$. Следовательно, (41) влечет, что

$$\max_{0\leqslant i\leqslant n}\left|\frac{f(B_{\tau_{n,i+1}}) - f(B_{\tau_{n,i}})}{B_{\tau_{n,i+1}} - B_{\tau_{n,i}}} - f'(B_{\frac{it}{n}})\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

по вероятности. Это значит, что

$$\left|\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(B_{\tau_{n,i+1}})-f(B_{\tau_{n,i}})}{B_{\tau_{n,i+1}}-B_{\tau_{n,i}}}\frac{t}{n}-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}f'(B_{\frac{it}{n}})\frac{t}{n}\right|\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \qquad (45)$$

по вероятности. Но

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}f'(B_{\frac{it}{n}})\frac{t}{n}$$

является интегральной суммой Римана для интеграла Римана

$$\frac{1}{2}\int_0^t f'(B_s)ds,$$

значит,

$$\left|\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}f'(B_{\frac{it}{n}})\frac{t}{n}-\frac{1}{2}\int_0^t f'(B_s)ds\right|\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \qquad (46)$$

почти наверное, а, следовательно, и по вероятности (см. приложение).

Исследуем первое слагаемое в правой части равенства (38). Рассуждениями, аналогичными использованным выше, с использованием (41) и других свойств броуновского движения, можно доказать, что

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1}f(B_{\tau_{n,i}})\left(B_{\tau_{n,i+1}}-B_{\tau_{n,i}}\right)-\sum_{i=0}^{n-1}f(B_{\frac{it}{n}})\left(B_{\frac{(i+1)t}{n}}-B_{\frac{it}{n}}\right)\right|\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \qquad (47)$$

по вероятности.

Теперь, учитывая представление Римана для стохастических интегралов (теорема 7.1), найдем, что

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1}f(B_{\frac{it}{n}})\left(B_{\frac{(i+1)t}{n}}-B_{\frac{it}{n}}\right)-\int\limits_0^t f(B_s)dB_s\right|\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \qquad (48)$$

по вероятности.

Объединяя (43)-(48), получим

$$\int_0^{B_t}f(s)ds=\frac{1}{2}\int_0^t f'(B_s)ds+\int\limits_0^t f(B_s)dB_s,$$

что совпадает с (35) с точностью до замены $f'$ на $f$ (а соответственно и в доказательстве предполагалась большая гладкость функции $f$, чем в условиях теоремы). □

## 8.2 Формула Ито для пространства-времени

Если $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, т.е. имеет непрерывные первую производную по первой перменной и вторую производную по второй, то справедлива формула

$$df(t, B_t) = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dB_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dt. \tag{49}$$

Так как интеграл Ито — (локальный) мартингал (см. пункт 7.1), то справедливо

**Следствие 1.** *Если $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, то из*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \tag{50}$$

*следует, что $f(t, B_t)$ — локальный мартингал.*

*Если к тому же*

$$\mathsf{E} \left( \int\limits_0^T \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 dt \right) < \infty,$$

*то $f(t, B_t)$ мартингал.*

**Пример 1**.

Возьмем

$$f(t, x) = \exp\left( \alpha x - \frac{\alpha^2 t}{2} \right),$$

тогда

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\alpha^2}{2} \exp\left( \alpha x - \frac{\alpha^2 t}{2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \alpha^2 \exp\left( \alpha x - \frac{\alpha^2 t}{2} \right).$$

Покажем, что $\mathsf{E}\left(\int\limits_0^T \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 dt\right) < \infty$ :

$$\mathsf{E}\left(\int\limits_0^T \alpha^2 e^{2\alpha B_t - \alpha^2 t} dt\right) = \int_0^T \alpha^2 e^{-\alpha^2 t} \mathsf{E}\left(e^{2\alpha B_t}\right) dt =$$

$$= \alpha^2 \int\limits_0^T e^{-\alpha^2 t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{2\alpha x} \cdot e^{-\frac{x^2}{2t}} dx dt =$$

$$= \alpha^2 \int\limits_0^T e^{-\alpha^2 t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-2\alpha t)^2}{2t}} e^{2\alpha^2 t} dx dt = \alpha^2 \int\limits_0^T e^{\alpha^2 t} dt.$$

Таким образом, на любом конечном отрезке

$$f(t, B_t) = \exp\left(\alpha B_t - \frac{\alpha^2 t}{2}\right)$$

— мартингал.

**Пример 2**.

Посчитаем ковариацию $\mathrm{cov}(\tau, B_\tau)$, где

$$\tau = \min\{t : B_t = a \text{ или } B_t = -b\}.$$

По определению ковариации и с учетом того, что $\mathsf{E}\,(B_\tau) = 0$ (см. (29))

$$\mathrm{cov}(\tau, B_\tau) = \mathsf{E}\,((\tau - \mathsf{E}\,(\tau))(B_\tau - \mathsf{E}\,(B_\tau))) = \\ = \mathsf{E}\,((\tau - \mathsf{E}\,(\tau))B_\tau) = \mathsf{E}\,(\tau B_\tau)\,.$$

Вычислим эту величину. Будем искать подходящую функцию вида

$$f(t, x) = tx + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta.$$

Положим сразу $\gamma = \delta = 0$. Потребуем, чтобы выполнялось условие мартингальности (50):

$$x = -\frac{1}{2}(6\alpha x + 2\beta) = -3\alpha x - \beta,$$

откуда $\beta = 0, \quad \alpha = -\frac{1}{3}$.

Таким образом, по следствию 1

$$f(t, B_t) = tB_t - \frac{B_t^3}{3} = X_t$$

является локальным мартингалом. Математическое ожидание

$$\mathsf{E}\left(\int\limits_0^T \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 dt\right) = \mathsf{E}\left(\int\limits_0^T (t - B_t^2)^2 dt\right) = \int\limits_0^T \mathsf{E}\left((t - B_t^2)^2\right) dt$$

конечно. Таким образом, на любом отрезке $[0, T]$ процесс $X_t$ — мартингал.

Далее имеем

$$|X_{t\wedge\tau}| \leqslant \tau \cdot \max(a, b) + \frac{\max^3(a, b)}{3}. \tag{51}$$

По теореме Дуба о процессе остановки $X_{t\wedge\tau}$ — мартингал, значит, $\mathsf{E}\,(X_{t\wedge\tau}) = \mathsf{E}\,(X_{0\wedge\tau}) = 0$.

Устремим $t \to \infty$, пользуясь теоремой Лебега П.??,(51) и тем, что $\mathsf{E}\,(\tau) < \infty$ :

$$\mathsf{E}\left(\lim_{t\to\infty} X_{t\wedge\tau}\right) = \lim_{t\to\infty} \mathsf{E}\,(X_{t\wedge\tau}) = 0.$$

С другой стороны, учитывая теорему 6.1,

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\,(X_\tau) = \mathsf{E}\,(\tau B_\tau) - \frac{1}{3}\mathsf{E}\left(B_\tau^3\right) = \\ = \mathsf{E}\,(\tau B_\tau) - \frac{1}{3}\left(a^3 P(B_\tau = a) - b^3 P(B_\tau = -b)\right) = \\ = \mathsf{E}\,(\tau B_\tau) - \frac{1}{3}\left(a^3 \cdot \frac{b}{a+b} - b^3\frac{a}{a+b}\right).\end{aligned}$$

Следовательно, $\mathrm{cov}(\tau, B_\tau) = \frac{1}{3}ab(a - b)$.

**Пример 3. Броуновское движение со смещением**.

Броуновским движением со смещением называется процесс

$$X_t = \mu t + \sigma B_t.$$

Найдем вероятность неразорения $P(X_\tau = a)$, где

$$\tau = \min\{t : X_t = a \text{ или } X_t = -b\}.$$

Ищем функцию $h : [-b, a] \to \mathbb{R}$ такую, чтобы $h(X_t)$ была мартингалом, причем выполняются граничные условия $h(-b) = 0$, $h(a) = 1$ :

$$h(X_t) = h(\mu t + \sigma B_t) = f(t, B_t),$$
$$f(t, x) = h(\mu t + \sigma x).$$

По условию мартингальности

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

или

$$\mu h' = -\frac{1}{2}\sigma^2 h''.$$

Отсюда

$$h'(y) = C_1 e^{-\frac{2\mu}{\sigma^2}y},$$

т.е.

$$h(y) = -C_1 \frac{\sigma^2}{2\mu} e^{-\frac{2\mu}{\sigma^2}y} + C_2.$$

Учитывая граничные условия, получаем

$$h(y) = \frac{\exp\left(-\frac{2\mu y}{\sigma^2}\right) - \exp\left(\frac{2\mu b}{\sigma^2}\right)}{\exp\left(-\frac{2\mu a}{\sigma^2}\right) - \exp\left(\frac{2\mu b}{\sigma^2}\right)}. \tag{52}$$

Итак,

$$M_t = h(\mu t + \sigma B_t)$$

с $h(y)$, задаваемой (52), — мартингал. Тогда по теореме Дуба о процессе остановки $M_{t\wedge\tau}$ — также мартингал. Значит,

$$\mathsf{E}\left(M_\tau\right) = \mathsf{E}\left(\lim_{t\to\infty} M_{t\wedge\tau}\right) = \lim_{t\to\infty} \mathsf{E}\left(M_{t\wedge\tau}\right) = M_0 = h(0) = \frac{1 - \exp\left(\frac{2\mu b}{\sigma^2}\right)}{\exp\left(-\frac{2\mu a}{\sigma^2}\right) - \exp\left(\frac{2\mu b}{\sigma^2}\right)}.$$

С другой стороны, непосредственный подсчет по определению математического ожидания дает равенство

$$\mathsf{E}\left(M_\tau\right) = \mathsf{E}\left(h(X_\tau)\right) = h(a) \cdot P(X_\tau = a) + h(-b) \cdot P(X_\tau = -b).$$

Таким образом,

$$P(X_\tau = a) = \frac{1 - \exp\left(-\frac{2\mu b}{\sigma^2}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{2\mu(a+b)}{\sigma^2}\right)}$$

Сравним эти результаты со случайным блужданием для нечестной игры. В формуле (11) было найдено, что

$$P(S_\tau = a) = \frac{(q/p)^b - 1}{(q/p)^{a+b} - 1}.$$

Таким образом, если взять $\mu$ и $\sigma^2$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \exp\left(-\frac{2\mu}{\sigma^2}\right),$$

то броуновское движение со смещением будет вести себя так же, как и случайное блуждание для нечестной игры.

## 8.3 Векторное обобщение формулы Ито

Нас интересуют функции вида $f(t, B_t^{(1)}, \ldots, B_t^{(n)})$, где $B_t^{(1)}, \ldots, B_t^{(n)}$ — независимые броуновские движения.

Тогда формула Ито имеет вид (например, для дважды дифференцируемых функций $f$):

$$df(t, B_t^{(1)}, \ldots, B_t^{(n)}) = \frac{\partial f}{\partial t} dt + (\nabla f, d\vec{B}_t) + \frac{1}{2}\Delta f dt,$$

где $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}, \nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}), d\vec{B}_t = (dB_t^{(1)}, \ldots, dB_t^{(n)})$.

Из этой формулы следует достаточное условие локальной мартингальности:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2}\Delta f.$$

В случае, когда $f$ не зависит от $t$, для всякой гармонической функции $f$ (т.е. такой, что $\Delta f = 0$) процесс $f(B_t^{(1)}, \ldots, B_t^{(n)})$ является локальным мартингалом.

**Пример.**

Найдем вероятность того, что точка, совершая броуновское движение, попадет в круг радиусом $r$ с центром в нуле, при условии, что она начала движение в точке $\vec{x}$, $d\vec{B}_0 = \vec{x}$.

Возьмем гармоническую функцию

$$h\left(\vec{x}\right) = \frac{\log R - \log|\vec{x}|}{\log R - \log r}.$$

Введем обозначения для моментов остановки

$$\tau_r = \min\left\{t : \left|\vec{B}_t\right| = r\right\},$$

$$\tau_R = \min\left\{t : \left|\vec{B}_t\right| = R\right\},$$

$$\tau = \tau_r \wedge \tau_R.$$

Так как $h\left(\vec{B}_t\right)$ — локальный мартингал, то по предложению 5.2 $h\left(\vec{B}_{t\wedge\tau}\right)$ — также локальный мартингал, значит, по свойству мартингала,

$$\mathsf{E}\left(h\left(\vec{B}_{t\wedge\tau}\right)\right) = \mathsf{E}\left(h\left(\vec{B}_0\right)\right) = h(\vec{x}).$$

С другой стороны, применяя обычное рассуждение при $t \to \infty$, получим

$$\mathsf{E}\left(h\left(\vec{B}_\tau\right)\right) = h\left(\vec{x}\right) = h\left(\vec{B}_{\tau_r}\right) \cdot P(\tau = \tau_r) + h\left(\vec{B}_{\tau_R}\right) \cdot P(\tau = \tau_R).$$

Таким образом, учитывая, что $|\vec{B}_{\tau_r}| = r, |\vec{B}_{\tau_R}| = R, h(\vec{x}) = 0$ для $|\vec{x}| = R$ и $h(\vec{x}) = 1$ для $|\vec{x}| = r$, найдем

$$P(\tau = \tau_r) = \frac{\log R - \log|\vec{x}|}{\log R - \log r}.$$

Устремляя $R \to \infty$, получаем, что при случайном блуждании на плоскости вероятность оказаться в заранее заданном круге радиуса $r$ равна 1, т.е. «пьяница найдет дорогу домой».

Теперь применим аналогичное рассуждение в случае $\mathbb{R}^d$, $d > 2$. Для этого рассмотрим гармоническую функцию

$$h\left(\vec{x}\right) = \frac{\frac{1}{R^{d-2}} - \frac{1}{|\vec{x}|^{d-2}}}{\frac{1}{R^{d-2}} - \frac{1}{r^{d-2}}}.$$

Получаем, что при случайном блуждании в пространстве $\mathbb{R}^d$, $d > 2$, вероятность оказаться в заранее заданном круге радиуса $r$ равна $\left(\frac{r}{|\vec{x}|}\right)^{d-2}$. Таким образом, чем дальше от начала мы стартовали, тем меньше вероятность вернуться за конечное время, или «пьяная птичка вряд ли вернется в гнездо».

## 8.4 Обобщение формулы Ито для стандартных процессов

Стандартный процесс — процесс, который может быть описан с помощью стохастического интеграла

$$dX_t = a(\omega, t)dt + b(\omega, t)dB_t,$$

причем $a, b$ — предсказуемые, измеримые и

$$P\left(\int_0^T |a(\omega, s)|ds < \infty\right) = 1$$

и

$$P\left(\int_0^T |b(\omega, s)|^2 ds < \infty\right) = 1.$$

Формула Ито для стандартных процессов имеет вид: если $Y_t = f(t, X_t)$, то

$$dY_t = f_t dt + f_x dX_t + \frac{1}{2} f_{xx} dX_t \bullet dX_t, \tag{53}$$

где $dX_t \bullet dX_t$ есть операция перемножения по формуле

| $\bullet$ | $dt$ | $dB_t$ |
|---|---|---|
| $dt$ | 0 | 0 |
| $dB_t$ | 0 | $dt$ |

Далее, предположим, что есть два стандартных процесса

$$dX_t = a(\omega, t)dt + b(\omega, t)dB_t,$$

$$dY_t = \alpha(\omega, t)dt + \beta(\omega, t)dB_t.$$

Тогда, если $Z_t = f(t, X_t, Y_t)$, то формула Ито будет иметь вид

$$dZ_t = f_t dt + f_x dX_t + f_y dY_t + \frac{1}{2} f_{xx} dX_t \bullet dX_t + \frac{1}{2} f_{yy} dY_t \bullet dY_t + f_{xy} dX_t \bullet dY_t.$$

Формула справедлива также в случае

$$dX_t = a(\omega,t)dt + b(\omega,t)dB_t^{(1)} + c(\omega,t)dB_t^{(2)},$$

$$dY_t = \alpha(\omega,t)dt + \beta(\omega,t)dB_t^{(1)} + \gamma(\omega,t)dB_t^{(2)}.$$

При этом перемножение $\bullet$ будет производиться следующим образом

$$\begin{array}{cccc} \bullet & dt & dB_t^{(1)} & dB_t^{(2)} \\ dt & 0 & 0 & 0 \\ dB_t^{(1)} & 0 & dt & 0 \\ dB_t^{(2)} & 0 & 0 & dt \end{array}.$$

**Следствие 1** (Формула интегрирования по частям)**.** *Пусть* $X_t, Y_t$ *— два стандартных процесса, зависящих от одного и того же броуновского движения. Тогда*

$$d(X_tY_t) = Y_t dX_t + X_t dY_t + dX_t \bullet dY_t,$$

*или, в интегральной форме,*

$$X_tY_t - X_0Y_0 = \int\limits_0^t Y_s dX_s + \int\limits_0^t X_s dY_s + \int\limits_0^t b(\omega,t)\beta(\omega,t)dt.$$

Для доказательства достаточно подставить в (53) $f(t, X_t, Y_t) = X_tY_t$.

## Вопросы и задачи

1. Использовать формулу Ито (простейший вариант) для доказательства следующего варианта формулы интегрирования по частям:

$$\int_0^t h(s)dB_s = h(t)B_t - \int_0^t h'(s)B_s ds$$

   для любой функции $f$, непрерывной вместе со своей производной на неотрицательной части действительной оси.

2. Используя связь между аналитическими (нужно рассмотреть функцию $z^2$) и гармоническими функциями (из курса математического анализа) и метод примера пункта 8.3, найти вероятность того, что стандартное двумерное броуновское движение с начальной точкой (2,0) достигнет $H(1)$ прежде чем $H(5)$, где $H(\alpha) = \{(x,y) : x^2 - y^2 = \alpha\}$.

3. Проверить формулу Ито для стандартных процессов на процессах вида $X_t = f(t, B_t)$, используя формулу Ито для пространства-времени.

# 9 Вывод формулы Блэка-Шоулза

Рассматриваем $(b, S)$-рынок, но, в отличие от параграфа 3, здесь время меняется непрерывно. Цена на облигации в момент $t$ удовлетворяет соотношению

$$db_t = rb_t dt,$$

где $r$ — процентная ставка. Цена акции меняется согласно модели Сэмюэльсона:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t. \tag{54}$$

Задача — определить безарбитражную цену производных ценных бумаг.

Выигрыш по европейскому опциону покупателя есть функция от $S_T$:

$$h = h(S_T) = (S_T - K)_+.$$

Для определения цены вводится понятие т. н. замещающего портфеля. Предположим, что деньги, потраченные на покупку опциона, тратятся на покупку акций и облигаций, $\alpha_t$ — количество акций в момент $t$, $\beta_t$ — количество облигаций. Тогда капитал портфеля есть

$$V_t = \alpha_t S_t + \beta_t b_t. \tag{55}$$

Портфель должен удовлетворять условию самофинансирования, т. е. изменение его цены может быть обусловлено лишь изменением цен акций и облигаций, т. е.

$$dV_t = \alpha_t dS_t + \beta_t db_t. \tag{56}$$

«Замещение» означает, что, как бы ни складывалась ситуация, должно быть $V_T = h(S_T)$.

Будем считать, что $V_t = f(t, S_t)$.

Так как $S_t$ — стандартный процесс, то по формуле Ито, примененной к (55) с учетом (54), имеем

$$dV_t = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\sigma^2 S_t^2 dt. \tag{57}$$

Так как $db_t = rb_t dt$, то из (56)

$$dV_t = \alpha_t dS_t + \beta_t r b_t dt. \tag{58}$$

Приравнивая (57) и (58), найдем, что справеливы равенства

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \alpha_t, \\ \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\sigma^2 S_t^2 = \beta_t r b_t. \end{cases}$$

Подставляя это в (56), получаем

$$f(t, S_t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, S_t) S_t + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial t}(t, S_t) + \frac{1}{2r}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sigma^2 S_t^2,$$

или, заменяя $S_t$ на $x$, приходим к дифференциальному уравнению в частных производных

$$f(t, x) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \cdot x + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + \frac{1}{2r}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sigma^2 x^2.$$

Записав его в форме

$$f_t = -\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 f_{xx} - r x f_x + r f, \;\; f(T, x) = h(x), \tag{59}$$

получили дифференциальное уравнение Блэка-Шоулза, причем нужно найти его решение, удовлетворяющее «конечному» условию $f(T, x) = h(x)$.

Решим это дифференциальное уравнение в частных производных. Если отвлечься от $t$, имеем обыкновенное дифференциальное уравнение Эйлера, для решения которого делаем замену $y = \ln x$. Чтобы получить задачу Коши, т.е. с начальным условием вместо конечного, заменяем $\tau = T - t$. Таким образом,

$$f(t, x) = g(\tau, y),$$

откуда

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial g}{\partial \tau},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{1}{x}$$

и
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial g}{\partial y}.$$
Подставляя, получим задачу Коши

$$\begin{cases} g_\tau = \frac{1}{2}\sigma^2 g_{yy} - \frac{1}{2}\sigma^2 g_y + r g_y - r g, \\ g(0,y) = h\left(e^y\right) = \psi(y). \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение

$$g_\tau = a g_{yy} + b g_y + c g, \tag{60}$$

где $a = \frac{1}{2}\sigma^2, \quad b = r - \frac{1}{2}\sigma^2, \quad c = -r$. Для его решения используем решение задачи Коши для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t = \lambda u_{xx}, \\ u(0,x) = f(x), \end{cases} \tag{61}$$

при следующем условии на рост функции $f$:

$$|f(x)| \leqslant A e^{B|x|^\rho}, \quad \rho < 2.$$

Это решение задается формулой

$$u(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y) k(\lambda, t, x-y) dy, \tag{62}$$

где
$$k(\lambda, t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda t}} e^{-\frac{x^2}{4\lambda} t}.$$

Цель: от уравнения теплопроводности перейти к уравнению (59) с помощью замены
$$u(t,x) = e^{\alpha t + \beta x} v(t,x). \tag{63}$$

Вычислим, как меняются производные:

$$u_t = \alpha e^{\alpha t + \beta x} v + e^{\alpha t + \beta x} v_t,$$

$$u_x = \beta e^{\alpha t + \beta x} v + e^{\alpha t + \beta x} v_x,$$
$$u_{xx} = \beta^2 e^{\alpha t + \beta x} v + 2\beta e^{\alpha t + \beta x} v_x + e^{\alpha t + \beta x} v_{xx}.$$

В результате уравнение теплопроводности преобразуется в

$$\alpha v + v_t = \lambda(\beta^2 v + 2\beta v_x + v_{xx}),$$

или

$$v_t = \lambda v_{xx} + 2\lambda\beta v_x + (\lambda\beta^2 - \alpha)v.$$

Сравнивая полученное уравнение с (60), найдем, что должны выполняться соотношения

$$\begin{cases} \lambda = a, \\ 2\beta\lambda = b, \\ \lambda\beta^2 - \alpha = c. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \lambda = a, \\ \beta = \frac{b}{2a}, \\ \alpha = \frac{b^2}{4a} - c = \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \end{cases} \tag{64}$$

Посмотрим, как преобразуется начальное условие задачи Коши (61):

$$u(0, x) = e^{\beta x} v(0, x),$$

$$v(0, x) = e^{-\beta x} f(x),$$

откуда

$$g(0, y) = e^{-\beta y} f(y) = \psi(y),$$

или

$$f(y) = e^{\beta y} \psi(y). \tag{65}$$

Подставляя теперь решение (62) задачи Коши (61) в (63), получим, учитывая (64) и (65),

$$g(\tau,y)=e^{-\alpha\tau-\beta y}u(\tau,y)=e^{-\alpha\tau-\beta y}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{\beta z}\psi(z)k(\lambda,\tau,y-z)dz=$$

$$=e^{-\alpha\tau-\beta y}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{\beta z}(e^z-K)_+\frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda\tau}}e^{-\frac{(y-z)^2}{4\lambda\tau}}dz=$$

$$=e^{-\alpha\tau-\beta y}\int\limits_{\ln K}^{+\infty}e^{\beta z}(e^z-K)\frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda\tau}}e^{-\frac{(y-z)^2}{4\lambda\tau}}dz=$$

$$=e^{-\alpha\tau-\beta y}\int\limits_{\ln K}^{+\infty}e^{-\frac{y^2-2yz+z^2-(\beta+1)4\lambda\tau z}{4\lambda\tau}}\frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda\tau}}dz-$$

$$-Ke^{-\alpha\tau-\beta y}\int\limits_{\ln K}^{+\infty}e^{-\frac{y^2-2yz+z^2-\beta 4\lambda\tau z}{4\lambda}\tau}\frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda\tau}}dz=I_1-I_2.$$

Будем использовать функцию Лапласа:

$$\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{t}e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

Тогда

$$I_2=Ke^{-\alpha\tau-\beta y}\int\limits_{\ln K}^{+\infty}e^{-\frac{y^2-2yz+z^2-\beta 4\lambda\tau z}{4\lambda\tau}}dz=$$

$$\left(\text{используя замену }\frac{y+2\beta\lambda\tau-z}{\sqrt{2\lambda\tau}}=t\right)$$

$$=Ke^{-\alpha\tau-\beta y}\int\limits_{-\infty}^{\frac{y+2\beta\lambda\tau-\ln K}{\sqrt{2\lambda\tau}}}e^{-\frac{t^2}{2}}\sqrt{2\lambda\tau}dt\cdot e^{\beta y+\beta^2\lambda\tau}=$$

$$=K\int\limits_{-\infty}^{\frac{y+2\beta\lambda\tau-\ln K}{\sqrt{2\lambda\tau}}}e^{-\frac{t^2}{2}}\sqrt{2\lambda\tau}dt\cdot e^{(\beta^2\lambda-\alpha)\tau}.$$

Так как
$$\beta^2\lambda - \alpha = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2-4ac}{4a} = c,$$
то
$$I_2 = Ke^{c\tau}\cdot\Phi\left(\frac{y+2\beta\lambda\tau-\ln K}{\sqrt{2\lambda\tau}}\right).$$
Аналогично,
$$I_1 = e^y\Phi\left(\frac{y+2(\beta+1)\lambda\tau-\ln K}{\sqrt{2\lambda\tau}}\right).$$
Возвращаясь к старым переменным, находим цену замещающего портфеля в начальный момент времени (т. е. цену опциона). Полагаем
$$\tau = T-t,\quad t=0,$$
$$y=\ln x = \ln S_0,$$
$$\lambda = \frac{1}{2}\sigma^2,\quad b = r-\frac{1}{2}\sigma^2,\quad c=-r.$$
Отсюда цена европейского опциона покупателя находится по формуле
$$\mathbb{C}_T = I_1 - I_2 =$$
$$= S_0\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma T}\right) - Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$
Это и есть формула Блэка-Шоулза.

## Вопросы и задачи

1. Проверить, что случайный процесс
$$X_t = e^{-\alpha t}\left(x_0+\frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha t}-1)+\sigma\int_0^t e^{\alpha s}dB_s\right)$$
удовлетворяет соотношению (является решением стохастического дифференциального уравнения)
$$dX_t = (-\alpha X_t+\beta)dt+\sigma dB_t,$$
с начальным условием $X_0 = x_0$ и $\alpha > 0$.

2. Доказать, что в случае, когда модель (b,S) рынка задается уравнениями

$$dS_t = \mu(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dB_t \text{ и } db_t = r(t, S_t)b_t dt,$$

безарбитражная цена во время $t$ европейского опциона со временем погашения $T$ и выплатой $h(S_T)$ задается функцией $f(t, S_t)$, такой, что $f(t, x)$ удовлетворяет уравнению в частных производных

$$f_t(t, x) = -\frac{1}{2}\sigma^2(t, x)f_{xx}(t, x) - r(t, x)xf_x(t, x) + r(t, x)f(t, x)$$

с конечным условием $f(T, x) = h(x)$.

3. В предположениях этого параграфа найти безарбитражную цену опциона европейского типа с функцией выплат $h(S_T)$, где $h(x)$ задавается формулой

$$h(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant K \\ x - K & x \in [K, K + D] \\ D & x \geqslant D. \end{cases}$$

# 10 Мартингальный подход к управлению риском платежных обязательств. Непрерывное время

## 10.1 Вывод формулы Блэка-Шоулза (мартингальный подход)

В этом пункте формула Блэка-Шоулза будет выведена методом, аналогичным методу вывода формулы Кокса-Росса-Рубинштейна из параграфа 3. Считаем, что цена акции удовлетворяет модели Самюэльсона

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t,$$

а цена облигации соотношению

$$db_t = rb_t dt.$$

Таким образом, учитывая формулу Ито (49)

$$S_t = S_0 \exp\left((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t\right),$$

$$b_t = e^{rt}.$$

Введем дисконтированную цену акции:

$$D_t = \frac{S_t}{b_t} = S_0 \exp\left(\left(\mu - r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma B_t\right).$$

Применяя формулу Ито (49), получим

$$dD_t = (\mu - r) D_t dt + \sigma D_t dB_t.$$

Отсюда видно, что дисконтированная цена — не мартингал (если только не $\mu = r$). Однако представим ее в виде

$$dD_t = \sigma D_t d\left(\frac{\mu - r}{\sigma} t + B_t\right) = \sigma D_t d\widetilde{B}_t,$$

где

$$\widetilde{B}_t = \frac{\mu - r}{\sigma} t + B_t = B_t + \int\limits_0^t \hat{\mu} ds,$$

и $\hat{\mu} = \frac{\mu - r}{\sigma}$. Таким образом, $D_t$ — мартингал, если $\widetilde{B}_t$ — броуновское движение. «Непрерывный аналог» рассуждений из параграфа 3, использующий так называемую теорию Гирсанова, показывает, что $\widetilde{B}_t$ действительно является броуновским движением относительно меры $Q$, задаваемой следующим образом:

$$Q(A) = \mathsf{E}_P(\mathbb{I}_A M_T),$$

где

$$M_t = \exp\left(-\int\limits_0^t \hat{\mu} dB_s - \frac{1}{2}\int\limits_0^t \hat{\mu}^2 ds\right),$$

и $\mathsf{E}_P$ обозначает математическое ожидание относительно исходной вероятностной меры $P$.

Согласно мартингальному подходу безарбитражная цена европейского опциона покупателя будет

$$V_0 = \mathsf{E}_Q\left(\frac{(S_T-K)_+}{b_T}\right).$$

Выразим $S_t$ через $\widetilde{B}_t$:

$$S_t = S_0\exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma\widetilde{B}_t\right),$$

откуда

$$S_T = S_0\exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\widetilde{B}_T\right).$$

Относительно меры $Q$ процесс $\widetilde{B}_t$ — стандартное броуновское движение, в частности, случайная величина $\widetilde{B}_T$ распределена по нормальному закону,

$$\widetilde{B}_T \sim \mathcal{N}(0,T).$$

Отсюда

$$V_0 = e^{-rT}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(S_0\exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma y\right)-K\right)_+\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{y^2}{2T}}dy.$$

Решим уравнение

$$S_0\exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma y\right)-K=0,$$

получим

$$y=\frac{1}{\sigma}\left(\ln\frac{K}{S_0}-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)=: y_0.$$

Тогда

$$V_0 = e^{-rT} \int\limits_{y_0}^{+\infty} \left( S_0 \exp\left( \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma y \right) - K \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{y^2}{2T}} dy =$$

$$= S_0 \int\limits_{y_0}^{+\infty} e^{-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma y - \frac{y^2}{2T} dy} - e^{-rT} K \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int\limits_{y_0}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2T}} dy =$$

$$= S_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int\limits_{y_0}^{+\infty} e^{-\frac{(y - T\sigma)^2}{2T}} dy - e^{-rT} K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{-\frac{y}{\sqrt{T}}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds =$$

$$= S_0 \Phi\left( -\frac{y_0 - T\sigma}{\sqrt{T}} \right) - e^{-rT} K \Phi\left( -\frac{y_0}{\sqrt{T}} \right) =$$

$$= S_0 \Phi\left( \frac{\left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right) T - \ln \frac{K}{S_0}}{\sigma\sqrt{T}} \right) - K e^{-rT} \Phi\left( \frac{\left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T - \ln \frac{K}{S_0}}{\sigma\sqrt{T}} \right).$$

Мы снова получили формулу Блэка-Шоулза.

## 10.2 Американский опцион покупателя

Необходимо выбрать момент остановки $\tau$, характеризующий самое оптимальное время погашения опциона, тогда ценой американского опциона покупателя, используя обозначения предыдущего пункта, будет

$$V_0^A = \sup_{\tau} \mathsf{E}_Q \left( \frac{(S_\tau - K)_+}{b_\tau} \right).$$

**Теорема 10.1.** *Если $h$ — выпуклая вниз функция, такая, что $h(0) = 0$, и если $M_t = \frac{h(S_t)}{b_t}$ суммируема на $[0, T]$ относительно меры $Q$, то $M_t$ является $Q$-субмартингалом.*

*Доказательство.* Заметим, что

$$px = px + (1 - p) \cdot 0.$$

Так как $h(x)$ — выпукла, то при $0 \leqslant p \leqslant 1$ отсюда

$$h(px) \leqslant ph(x) + (1 - p)h(0) = ph(x).$$

Тогда

$$\mathsf{E}_Q\left(M_{t+s} \mid \mathcal{F}_s\right) = \mathsf{E}_Q\left(\left.\frac{h(S_{t+s})}{b_{t+s}}\right| \mathcal{F}_s\right) =$$

$$(\text{ так как } b_{t+s} = e^{(t+s)r} = e^{rt} \cdot e^{rs} = b_t \cdot b_s)$$

$$= \frac{1}{b_s}\mathsf{E}_Q\left(\left.\frac{b_s h(S_{t+s})}{b_{t+s}}\right| \mathcal{F}_s\right) \geqslant \frac{1}{b_s}\mathsf{E}_Q\left(h\left(\frac{b_s S_{t+s}}{b_{t+s}}\right)\middle| \mathcal{F}_s\right) \geqslant$$

$$(\text{по неравенству Йенсена (см. приложение A.2)}) \geqslant \frac{1}{b_s}h\left(\mathsf{E}_Q\left(\left.\frac{b_s S_{t+s}}{b_{t+s}}\right| \mathcal{F}_s\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{b_s}h\left(b_s \cdot \frac{S_s}{b_s}\right) = \frac{S_s}{b_s} = M_s.$$

□

Дадим теперь интерпретацию доказанной теоремы в терминах времени погашения американского опциона.

Для любого момента остановки $\tau$ справедливо неравенство $\tau \leqslant T$ и в силу того, что $\frac{(S_t-K)_+}{b_t}$ является субмартингалом (см. задачу 2 к параграфу 5), имеем (используя модификацию теоремы Дуба о моментах остановки)

$$\mathsf{E}_Q\frac{(S_\tau - K)_+}{b_\tau} \leqslant \mathsf{E}_Q\frac{(S_T - K)_+}{b_T},$$

откуда

$$\sup_\tau \mathsf{E}_Q\left(\frac{(S_\tau - K)_+}{b_\tau}\right) \leqslant \mathsf{E}_Q\left(\frac{(S_T - K)_+}{b_T}\right),$$

другими словами,

$$V_0^A \leqslant V_0^E.$$

Обратное неравенство очевидно. Таким образом, $V_0^E = V_0^A$. Это значит, что теоретически американский опцион невыгодно погашать раньше окончания его срока действия $T$.

## 10.3 Русские опционы

**Определение 10.1.** *Опционы американского типа с функциями выплат*

$$f_t = e^{-\lambda t} g_t(S), \quad t \geqslant 0,$$

*где*
$$g_t(S) = \left(\max_{u\leqslant t} S_u - aS_t\right)_+, \quad a \geqslant 0,$$
*называются «русскими опционами», или "look-back".*

Они относятся к классу опционов продавца с последействием и дисконтированием.

Будем считать, что $(b, S)$-рынок имеет стандартный вид:
$$db_t = rb_t dt, \quad b_0 > 0,$$
и
$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t, \quad S_0 > 0.$$
В этом случае
$$\frac{S_t}{b_t} = \frac{S_0}{b_0} e^{\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t},$$
т.е. относительно исходной вероятностной меры $P$ процесс
$$\left\{\frac{S_t}{b_t}\right\}$$
не является мартингалом. Обозначим через $\mathsf{E}_x$ математическое ожидание относительно такой вероятностной меры $P_x$, что $dS_t$ имеет вид (54), причем $S_0 = x$. Обозначим через $\mathfrak{M}_0^\infty$ и $\overline{\mathfrak{M}_0^\infty}$ классы моментов остановки $\tau$ таких, что
$$\mathfrak{M}_0^\infty = \{\tau : 0 \leqslant \tau(\omega) < \infty, \omega \in \Omega\}$$
и
$$\overline{\mathfrak{M}_0^\infty} = \{\tau : 0 \leqslant \tau(\omega) \leqslant \infty, \omega \in \Omega\}.$$
Тогда
$$\mathcal{U}_*(x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^\infty} \mathsf{E}_x e^{-r\tau} f_\tau(S)$$
и
$$\overline{\mathcal{U}}_*(x) = \sup_{\tau \in \overline{\mathfrak{M}_0^\infty}} \mathsf{E}_x e^{-r\tau} f_\tau(S) \mathbb{I}_{\{\tau < \infty\}}$$
обозначают оптимальные стоимости опциона в предположении, что покупатель может выбирать моменты его погашения в классах $\mathfrak{M}_0^\infty$ и $\overline{\mathfrak{M}_0^\infty}$ (в последнем случае допускается, при $\tau = \infty$, возможность непредъявления

опциона к погашению). Соответственно моменты $\tau$, на которых достигаются эти верхние грани (если таковые существуют, т.е. тогда вместо sup можно писать max), являются оптимальными моментами остановки.

Чтобы найти эти оптимальные моменты введем, как и в первом пункте этого параграфа, мартингальную вероятностную меру $\hat{P}_t$, т.е. такую меру, относительно которой процесс $\hat{B}_t = B_t - \sigma t$ является броуновским движением. Соответствующие математические ожидания будем обозначать $\hat{\mathsf{E}}$ и тогда для любой измеримой функции $F$

$$\hat{\mathsf{E}}_x(F(S)) = \mathsf{E}_x(F(S)Z_t), \quad Z_t = e^{\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t} = \frac{S_t/S_0}{b_t/b_0}, \quad t \geqslant 0.$$

Тогда для любого $\tau \in \overline{\mathfrak{M}_0^\infty}$

$$\mathsf{E}_x e^{-(\lambda+r)\tau} g_\tau(S)\mathbb{I}_{\{\tau<\infty\}} = x\mathsf{E}_x e^{-\lambda\tau}\frac{S_\tau/S_0}{b_\tau/b_0}\frac{g_\tau(S)}{S_\tau}\mathbb{I}_{\{\tau<\infty\}} =$$

(так как при вычислении $\mathsf{E}_x$ принимается $S_0 = x$)

$$x\mathsf{E}_x e^{-\lambda\tau} Z_\tau \frac{(\max_{u\leqslant\tau} S_u - aS_\tau)_+}{S_\tau}\mathbb{I}_{\{\tau<\infty\}} = x\hat{\mathsf{E}}e^{-\lambda\tau}\left[\frac{\max_{u\leqslant\tau} S_u}{S_\tau} - a\right]_+ \mathbb{I}_{\{\tau<\infty\}}.$$

Введем процесс

$$\psi_t = \frac{\max_{u\leqslant t} S_u}{S_t},$$

т.е. $\psi_0 = 1$. Тогда

$$\hat{\mathsf{E}}e^{-\lambda\tau}\left[\frac{\max_{u\leqslant\tau} S_u}{S_\tau} - a\right]_+ \mathbb{I}_{\{\tau<\infty\}} = \hat{\mathsf{E}}e^{-\lambda\tau}\left[\psi_\tau - a\right]_+ \mathbb{I}_{\{\tau<\infty\}}.$$

Отсюда получаем

$$\mathcal{U}_*(x) = x\hat{U}, \quad \overline{\mathcal{U}}_*(x) = x\hat{\hat{U}}, \tag{66}$$

где

$$\hat{U} = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}_0^\infty} \hat{\mathsf{E}}e^{-\lambda\tau}\left[\psi_\tau - a\right]_+$$

и

$$\hat{\hat{U}} = \sup_{\tau\in\overline{\mathfrak{M}_0^\infty}} \hat{\mathsf{E}}e^{-\lambda\tau}\left[\psi_\tau - a\right]_+ \mathbb{I}_{\{\tau<\infty\}}.$$

Так как $d\hat{B}_t = dB_t - \sigma dt$, то из (54) имеем

$$dS_t = S_t \left[ (r + \sigma^2) dt + \sigma d\hat{B}_t \right].$$

По формуле Ито (53)

$$d\left(\frac{1}{S_t}\right) = -\frac{1}{S_t^2} dS_t + \frac{1}{S_t^3} dS_t \bullet dS_t =$$

$$= -\frac{1}{S_t}\left[(r+\sigma^2)dt + \sigma d\hat{B}_t\right] + \frac{1}{S_t}\sigma^2 dt = -\frac{1}{S_t}\left(rdt + \sigma d\hat{B}_t\right).$$

Кроме того, обозначив $N_t = \max_{u \leqslant t} S_u$, видим, что $\{N_t\}$ — неубывающий процесс, следовательно, $dN_t$ не содержит стохастической компоненты и $dN_t \bullet d\left(\frac{1}{S_t}\right) = 0$. Тогда

$$d\psi_t = d\left(N_t \frac{1}{S_t}\right) = N_t d\left(\frac{1}{S_t}\right) + \frac{1}{S_t} dN_t =$$

$$= -\frac{N_t}{S_t}(rdt + \sigma d\hat{B}_t) + \frac{dN_t}{S_t} = -\psi_t(rdt + \sigma d\hat{B}_t) + d\varphi_t,$$

где $\varphi_t$ — неубывающий процесс, причем можно доказать, что он растет на множестве

$$\{(\omega, t) : \psi_t(\omega) = 1\}.$$

**Теорема 10.2.** *Пусть* $\lambda > 0, a \geqslant 0$. *Тогда*

$$\hat{U} = \hat{\hat{U}} = \begin{cases} (\hat{\psi} - a)\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 \hat{\psi}^{\gamma_1} - \gamma_1 \hat{\psi}^{\gamma_2}}, & \hat{\psi} > 1, \\ 1 - a, & \hat{\psi} \leqslant 1, \end{cases} \tag{67}$$

*где*

$$\gamma_k = \frac{A}{2} + (-1)^k \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + B}, \quad k = 1, 2,$$

*являются корнями квадратного уравнения*

$$\gamma^2 - A\gamma - B = 0$$

*с*

$$A = 1 + \frac{2r}{\sigma^2}, \quad B = \frac{2\lambda}{\sigma^2};$$

*"порог"* $\hat{\psi}$ *является решением трансцендентного уравнения*

$$\psi^{\gamma_1}\left(1-\frac{1}{\gamma_1}-\frac{a}{\psi}\right)=\psi^{\gamma_2}\left(1-\frac{1}{\gamma_2}-\frac{a}{\psi}\right)$$

*в области* $\psi > a$. *Если* $a=0$, *то*

$$\hat{\psi}=\left|\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\frac{\gamma_1-1}{\gamma_2-1}\right|^{\frac{1}{\gamma_2-\gamma_1}}. \tag{68}$$

*Момент*

$$\hat{\tau}=\inf\left\{t>0:\psi_t\geqslant\hat{\psi}\right\}$$

*таков, что* $\hat{P}(\hat{\tau}<\infty)=1$ *и является оптимальным как в классе* $\mathfrak{M}_0^\infty$, *так и в классе* $\overline{\mathfrak{M}_0^\infty}$.

Прежде чем дать набросок доказательства, подчеркнем практическую важность этой теоремы. При $a=0$, вычислив порог по формуле (68), мы немедленно определим стоимость соответствующего опциона из формул (66),(67) и оптимальный момент погашения.

*Доказательство.* Рассмотрим лишь случай $a=0$ .

Обозначим

$$M_t=e^{-\lambda t}\psi_t h(\psi_t) \tag{69}$$

и определим функцию $h=h(\psi),\psi\geqslant 1$, так, чтобы по мере $\hat{P}$ процесс $\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ был бы (локальным) мартингалом.

Применяя формулу Ито к (69), находим, что

$$dM_t=e^{-\lambda t}\psi_t\left[A_t dt+C_t(-\sigma d\hat{B}_t+d\varphi_t)\right], \tag{70}$$

где

$$A_t=-(\lambda+r)h(\psi_t)+(\sigma^2-r)\psi_t h'(\psi_t)+\frac{1}{2}\sigma^2\psi_t^2 h''(\psi_t),$$

$$C_t=h'(\psi_t)+h(\psi_t).$$

Из (70) и (локальной) мартингальности стохастических интегралов видно, что для того, чтобы процесс $\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ являлся (локальным) мартингалом (относительно меры $\hat{P}$), функцию $h(\psi)$ достаточно определить из решения следующей задачи:

$$-(\lambda+r)h(\psi)+(\sigma^2-r)\psi h'(\psi)+\frac{1}{2}\sigma^2\psi^2 h''(\psi)=0,\quad \psi>1 \tag{71}$$

(т.е. $A_t \equiv 0$) и, с учетом того, что процесс $\varphi_t$ растет лишь там, где $\psi_t = 1$ (т.е. $\psi_t \to 1, \psi_t \geqslant 1$), с граничным условием

$$h'(1+) + h(1+) = 0$$

(т.е. $C_t d\varphi_t \equiv 0$). Перепишем уравнение (71) в виде

$$\psi^2 h''(\psi) + 2(1 - \frac{r}{\sigma^2})\psi h'(\psi) - 2\frac{\lambda + r}{\sigma^2} h(\psi) = 0$$

и будем искать его решение в виде $h(\psi) = \psi^x$. Получим

$$\psi^x \left( x(x-1) + 2(1 - \frac{r}{\sigma^2})x - 2\frac{\lambda + r}{\sigma^2} \right) = 0,$$

или

$$x(x-1) + 2(1 - \frac{r}{\sigma^2})x - 2\frac{\lambda + r}{\sigma^2} = 0.$$

Сравним это уравнение с уравнением

$$\gamma^2 - \left(1 + \frac{2r}{\sigma^2}\right)\gamma - \frac{2\lambda}{\sigma^2} = 0$$

из условия теоремы. Ясно, что эти уравнения переходят одно в другое при замене $\gamma = x + 1$. Таким образом, общее решение уравнения (71) имеет вид

$$h(\psi) = \alpha_1 \psi^{\gamma_1 - 1} + \alpha_2 \psi^{\gamma_2 - 1}, \quad \psi > 1.$$

Проверим теперь выполнение граничного условия. Имеем

$$\alpha_1(\gamma_1 - 1) + \alpha_2(\gamma_2 - 1) + \alpha_1 + \alpha_2 = 0.$$

Добавив условие нормализации, скажем $h(1+) = 1$ (в этом случае $M_0 = 1$), получим еще одно условие: $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, откуда

$$\alpha_2 = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2}, \quad \alpha_1 = \frac{\gamma_2}{\gamma_2 - \gamma_1}.$$

Следовательно,

$$h(\psi) = \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} \left[ \gamma_2 \psi^{\gamma_1 - 1} - \gamma_1 \psi^{\gamma_2 - 1} \right].$$

При этом $\gamma_1 < 0, \gamma_2 > 1, h(\psi) \geqslant 0$ и $h'(\psi) = 0$ при $\psi = \tilde{\psi}$, где $\tilde{\psi}$ определяется из соотношения

$$\tilde{\psi}^{\gamma_2-\gamma_1}\frac{\gamma_1(\gamma_2-1)}{\gamma_2(\gamma_1-1)} = 1,$$

т.е. $\tilde{\psi}$ совпадает с $\hat{\psi}$, определяемым формулой (68). При этом в точке $\hat{\psi}$ функция $h(\psi)$ принимает свое минимальное значение. Таким образом, для найденной функции процесс (69) является неотрицательным локальным мартингалом, а, следовательно (см. предложение 5.4), супермартингалом.

Поэтому для всякого $\tau \in \mathfrak{M}_0^\infty$

$$\hat{\mathsf{E}}e^{-\lambda\tau}\psi_\tau = \hat{\mathsf{E}}\left(\frac{M_\tau}{h(\psi_\tau)}\right) \leqslant \hat{\mathsf{E}}\left(\frac{M_\tau}{h(\hat{\psi})}\right) = \frac{1}{h(\hat{\psi})}\hat{\mathsf{E}}(M_\tau) \leqslant \text{ (поскольку}$$

$$M_\tau \text{ — супермартингал) } \leqslant \frac{1}{h(\hat{\psi})}\hat{\mathsf{E}}(M_0) = \frac{1}{h(\hat{\psi})} = \frac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_2\hat{\psi}^{\gamma_1-1} - \gamma_1\hat{\psi}^{\gamma_2-1}}.$$

Можно показать, что $\hat{P}(\hat{\tau} < \infty) = 1$, и для этого момента остановки $\hat{\tau}$ справедливо соотношение

$$\hat{\mathsf{E}}e^{-\lambda\hat{\tau}}\psi_{\hat{\tau}} = \hat{\mathsf{E}}\left(\frac{M_{\hat{\tau}}}{h(\psi_{\hat{\tau}})}\right) = \frac{1}{h(\hat{\psi})},$$

тем самым установив, что $\hat{U} = \frac{1}{h(\hat{\psi})}$, что и требовалось. □

# A Приложение

## A.1 Основные понятия теории интеграла Лебега по (вероятностной) мере

Цель этого пункта - изложить основные сведения теории интеграла Лебега. Элементы этой теории излагаются (в той или иной степени общности) в курсе математического анализа, но поскольку в теории вероятностей и в этом курсе ряд основополагающих фактов этой теории используется весьма часто, здесь кратко повторяется также и весь процесс построения теории интеграла Лебега.

**Определение A.1.** *Система множеств $\mathcal{A}$ называется полукольцом, если*

*1.* $\emptyset \in \mathcal{A}$*;*

*2. для любых двух множеств* $A_1 \in \mathcal{A}, A_2 \in \mathcal{A}$ *их пересечение* $A_1 \cap A_2$ *также принадлежит* $\mathcal{A}$*;*

*3. для любых двух множеств* $A_1 \in \mathcal{A}, A \in \mathcal{A}$ *таких, что* $A_1 \subset A$, *найдется конечное число множеств* $A_2 \in \mathcal{A}, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, *для которых выполнено соотношение* $A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_n = A$ *(знак* $\sqcup$ *обозначает дизъюнктное объединение, т.е. его наличие говорит о том, что все множества* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *не пересекаются между собой).*

Основными примерами полуколец являются

1. система всех полуинтервалов вида $[a, b), a \leqslant b$ на прямой $\mathbb{R}$;

2. система всех брусьев в $\mathbb{R}^n$ (брусом называется декартово произведение промежутков $\prod_{k=1}^{n} \langle a_k, b_k \rangle, a_k < b_k$, где символ $\langle a, b \rangle$ обозначает промежуток, т.е. заменяет либо отрезок $[a, b]$, либо интервал $(a, b)$, либо полуинтервалы $[a, b), (a, b]$.)

Совокупность всех интервалов на прямой не является полукольцом.

Если существует такое множество $E \in \mathcal{A}$, что для любого множества $A \in \mathcal{A}$ выполнено равенство $A \cap E = A$, то полукольцо $\mathcal{A}$ называется полукольцом с единицей $E$.

Примерами полуколец с единицей может служить, например, совокупность всех брусьев, являющихся подмножествами фиксированного бруса (в дальнейшем в качестве такого бруса будет использоваться единичный куб $[0, 1]^n$.)

**Определение A.2.** *Система множеств* $\mathcal{A}$ *называется кольцом, если из того, что* $A_1 \in \mathcal{A}, A_2 \in \mathcal{A}$, *следует, что их объединение* $A_1 \cup A_2$ *и их симметрическая разность* $A_1 \triangle A_2$ *(по определению* $A_1 \triangle A_2 = (A_1 \cup A_2) \setminus (A_1 \cap A_2)$*) принадлежат* $\mathcal{A}$*. Кольцо с единицей называется алгеброй.*

*Если, кроме того, для любых* $A_1 \in \mathcal{A}, A_2 \in \mathcal{A}, \ldots$ *их объединение* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *также принадлежит кольцу (алгебре)* $\mathcal{A}$*, то* $\mathcal{A}$ *называется* $\sigma$*-кольцом (*$\sigma$*-алгеброй).*

**Предложение A.1.** *Минимальное кольцо $\mathcal{R}(\mathcal{A})$, содержащее данную совокупность множеств $\mathcal{A}$, состоит из всевозможных множеств, представимых как конечное объединение непересекающихся множеств из $\mathcal{A}$.*

**Определение A.3.** *Элементарным множеством в $\mathbb{R}^n$ называется множество, представимое в виде конечного объединения брусьев в $\mathbb{R}^n$.*

**Определение A.4.** *Элементы минимальной $\sigma$-алгебры, содержащей все брусья в $\mathbb{R}^n$, называются борелевскими множествами, а сама эта $\sigma$-алгебра — борелевской $\sigma$-алгеброй.*

**Определение A.5.** *Мерой на полукольце множеств $\mathcal{A}$ называется отображение $m : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty)$ такое, что из выполнения соотношения $A_0 = \bigsqcup_{i=1}^{k} A_i$, где $A_i \in \mathcal{A}, i = 0, 1, \ldots, k$, следует, что $m(A) = \sum_{i=1}^{k} m(A_i)$. Если же, кроме того, для любых таких $A_0, A_1, \ldots,$ что $A_i \in \mathcal{A}, i = 0, 1, \ldots,$ и $A_0 = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$, имеет место равенство $m(A_0) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$, то $m$ называется $\sigma$-аддитивной мерой.*

Основным примером $\sigma$-аддитивной меры является мера, заданная на полукольце брусьев следующим соотношением: $m(\prod_{i=1}^{n} \langle a_i, b_i \rangle) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$. Любая $\sigma$-аддитивная мера на полукольце может быть естественным образом продолжена на минимальное кольцо, содержащее заданное полукольцо. Продолженную меру будем обозначать через $\nu$.

Мера Лебега является дальнейшим продолжением $\sigma$-аддитивной меры. Для ее определения нужно понятие внешней меры Лебега.

**Определение A.6.** *Если на полукольце $\mathcal{A}$ с единицей $E$ задана $\sigma$-аддитивная мера $m$, то внешняя мера Лебега любого множества $A \subset E$ определена равенством*

$$\mu^*(A) = \inf_{\substack{A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \\ A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}} \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i).$$

**Определение A.7.** *В условиях предыдущего определения множество $A \subset E$ называется измеримым по Лебегу, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое множество $A_\varepsilon$ из минимального кольца $\mathcal{R}(\mathcal{A})$, содержащего $\mathcal{A}$, что $\mu^*(A \triangle A_\varepsilon) < \varepsilon$.*

Оказывается, что множество всех измеримых по Лебегу подмножеств $E$ образует $\sigma$-алгебру, которую мы будем обозначать через $\mathcal{M}$. Для множеств, входящих в $\mathcal{M}$ определим $\mu = \mu^*$, тем самым задав некоторую функцию множеств на $\mathcal{M}$, которая оказывается $\sigma$-аддитивной мерой и называется мерой Лебега. Заметим, что определение измеримых по Лебегу множеств зависит от начальных данных — полукольца и меры на нем. Если взять полукольцо брусьев, являющихся подмножествами фиксированного куба, с мерой на нем, определенной выше, то построенная мера Лебега будет называться классической, в отличие от общей, абстрактной. Борелевской мерой называется мера, определенная на борелевских множествах, со значениями, равными значениям классической меры Лебега на них. Классическая мера Лебега может быть определена и на подмножествах $\mathbb{R}^n$, а не $E$, для чего достаточно представить $\mathbb{R}^n$, например, в виде объединения непересекающихся кубов с вершинами в целочисленных точках, $\mathbb{R}^n = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} K_i$, $K_i = \prod_{j=1}^{n}[m_j, m_j+1)$, после чего считать множество $A$ измеримым, если все его порции $A \cap K_i$ измеримы, и (возможно, бесконечной) мерой считать

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(A \cap K_i),$$

где $\mu_i$ — классическая мера Лебега на подмножествах $K_i$.

Заданная на кольце $\mathcal{R}$ мера $\mu$ называется полной, если из $A \in \mathcal{R}, \mu(A) = 0, B \subset A$ следует, что $B \in \mathcal{R}, \mu(B) = 0$.

**Определение A.8.** *Если $A, B$ — два множества, то положим $A \times B = \{(x, y) : x \in X$ и $y \in Y\}$. Если $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ — две совокупности множеств, то $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = \{A \times B : A \in \mathcal{A}_1, B \in \mathcal{A}_2\}$.*

**Определение A.9.** *Пусть $m_1, m_2$ — меры, заданные на полукольцах $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ соответственно. Их прямым произведением $m_1 \times m_2$ называется функция, заданная на полукольце $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ формулой $m(A_1 \times A_2) = m_1(A_1)m_2(A_2)$, где $A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2$.*

Можно доказать, что прямое произведение мер является мерой и если обе меры $\sigma$-аддитивные, то и их прямое произведение — $\sigma$-аддитивная мера.

**Определение A.10.** *Тройка $(X, \mathcal{M}, \mu)$, где $\mathcal{M}$ — $\sigma$-алгебра с единицей $X$, а $\mu$ — $\sigma$-аддитивная мера на $\mathcal{M}$, называется измеримым простран-*

*ством. Если дополнительно предполагается, что $\mu(X) = 1$, то измеримое пространство называется также вероятностным пространством, мера $\mu$ — вероятностной мерой, или вероятностью, и в теории вероятностей ее принято обозначать через $P$, $\sigma$-алгебра $\mathcal{M}$ обозначается через $\mathcal{F}$, множество $X$ — через $\Omega$.*

Если какое-либо свойство выполнено всюду, кроме, быть может, множества нулевой меры (вероятности), то говорят, что свойство имеет место почти всюду (почти наверное).

**Определение A.11.** *Пусть $(X, \mathcal{M}, \mu)$ — измеримое пространство, $A \in \mathcal{M}$, а функция $f(x)$ задана на $A$ и принимает либо действительные значения, либо $+\infty, -\infty$. Тогда $f(x)$ называется измеримой, если при каждом $c \in \mathbb{R}$ выполняется соотношение*

$$\{x \in X : c < f(x) \leqslant +\infty\} \in \mathcal{M}.$$

В теории вероятностей аналогичное определение приводит к измеримым случайным величинам.

Предположим, что $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $f(x)$ — измеримые и конечные на измеримом пространстве $(X, \mathcal{M}, \mu)$ функции.

**Определение A.12.** *Говорят, что последовательность $f_n(x) \Longrightarrow f(x)$ на $X$ при $n \longrightarrow \infty$ (сходится по мере на $X$), если для любого $\varepsilon > 0$ выполняется соотношение*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}\right) = 0.$$

Для вероятностного пространства это — определение сходимости по вероятности. Из сходимости почти всюду на множестве конечной меры следует сходимость по мере (соответственно из сходимости почти наверное следует сходимость по вероятности).

Функция $h$ называется простой, если она измерима на измеримом пространстве и принимает лишь конечное число значений, причем любое ненулевое значение принимается на множестве конечной меры. Тогда интеграл Лебега $\int_X h(x)d\mu$ от нее определяется как сумма попарных произведений всех ненулевых значений этой функции на меры тех множеств, на которых функция принимает соответствующие значения.

Для произвольной измеримой неотрицательной функции на множестве $E \in \mathcal{M}$ обозначим

$$Q_f = \{ \text{ неотрицательные простые функции } h(x) \text{ на } E : \\ h(x) \leqslant f(x) \text{ при всех } x \in E\}.$$

Тогда интегралом Лебега от произвольной неотрицательной измеримой функции на $E$ называется

$$\int_E f(x) d\mu = \sup_{h \in Q_f} \int_E h(x) d\mu$$

(здесь допускается и бесконечное значение). Если так определенный интеграл конечен, то говорят, что $f \in L(E)$ (функция $f(x)$ измерима по Лебегу, или суммируема, на множестве $E$.)

Теперь для произвольной измеримой функции $f(x)$ на $E \in \mathcal{M}$ определим две функции

$$f_+(x) = \max(f(x), 0) \text{ и } f_-(x) = \max(-f(x), 0)$$

и будем говорить, что $f(x)$ измерима по Лебегу на множестве $E$, если обе функции $f_+(x)$ и $f_-(x)$ измеримы по Лебегу на множестве $E$. При этом

$$\int_E f(x) d\mu = \int_E f_+(x) d\mu - \int_E f_-(x) d\mu.$$

Для вероятностного пространства вместо понятия интеграла говорят о математическом ожидании и используют обозначение $\mathsf{E}(F)$ (так как случайные величины в теории вероятностей принято обозначать заглавными буквами).

Основными теоремами об интегралах Лебега, используемыми в этом курсе, являются следующие.

**Теорема A.1** (теорема Лебега)**.** *Пусть мера $\mu$ полна, а $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — такая последовательность измеримых на $E$ функций, что существует функция $F \in L(E)$, для которой $|f_n(x)| \leqslant F(x)$ при всех $n$ и $x \in E$, и $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ при $n \longrightarrow \infty$ почти всюду на множестве $E$. Тогда функция $f(x)$ измерима по Лебегу на множестве $E$ и*

$$\int_E f(x) d\mu = \lim_{n \longrightarrow \infty} \int_E f_n(x) d\mu.$$

**Теорема A.2** (лемма Фату). *Если мера $\mu$ полна, а $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность измеримых на $E$ неотрицательных функций, то*

$$\int_E \liminf_{n\longrightarrow\infty} f_n(x)d\mu \leqslant \liminf_{n\longrightarrow\infty} \int_E f_n(x)d\mu.$$

Прежде чем формулировать следующую теорему, дополним данное ранее определение прямого произведения мер, а именно, считаем, что прямым произведением двух мер Лебега (абстрактных) из двух измеримых пространств $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ и $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ будет продолжение $\mu$ ранее определенного произведения $\mu_1 \times \mu_2$ с полукольца, являющегося прямым произведением соответствующих полуколец, на лебеговскую $\sigma$-алгебру, которую будем обозначать через $\mathcal{M}$. Через $E(x)$ будем обозначать сечения множества $E$:

$$E(x) = \{y \in X_2 : (x, y) \in E\}.$$

**Теорема A.3** (теорема Фубини). *Пусть меры $\mu_1$ и $\mu_2$ полны, множество $E$ измеримо относительно только что определенной $\sigma$-алгебры $\mathcal{M}$ и функция $f(x, y)$ измерима по Лебегу на множестве $E$. Тогда для почти всех относительно меры $\mu_1$ значений $x \in X_1$ функция $f(x, y)$ $\mu_2$-измерима, функция*

$$\Phi(x) = \int_{E(x)} f(x, y)d\mu_2$$

*измерима по Лебегу (суммируема) на $X_1$ и*

$$\int_E f(x, y)d\mu = \int_{X_1} \Phi(x)d\mu_1 = \int_{X_1}\int_{E(x)} f(x, y)d\mu_2 d\mu_1.$$

*Аналогичные утверждения справедливы для другого повторного интеграла.*

Наконец, упомянем о пространстве $L_p(X)$, определенном для $1 \leqslant p < \infty$, и измеримого пространства $(X, \mathcal{M}, \mu)$, состоящем из измеримых функций $f$ таких, что интеграл $\int_X |f(x)|^p d\mu$ конечен. При этом две функции, совпадающие $\mu$-почти всюду на $X$, отождествляются как элементы пространства $L_p(X)$. Норма в этом пространстве задается равенством

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu\right)^{1/p}$$

оно полное, т.е. из фундаментальности последовательности в этом пространстве следует ее сходимость. Отметим также, что из сходимости почти всюду на $X$ следует сходимость в смысле $L_p(X)$ в случае конечности меры $\mu(X)$.

## A.2 Некоторые сведения из теории вероятностей

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство. Элементы $\sigma$-алгебры $\mathcal{F}$ называются событиями, индикаторная функция события — это функция $\mathbb{I}_A$, задаваемая на $\Omega$ следующим образом:

$$\mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

**Лемма A.1** (Бореля – Кантелли)**.** *Если $\{A_i\}$ — последовательность событий,то из сходимости ряда*

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

*следует, что вероятность сходимости ряда*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{I}_{A_i}$$

*равна одному.*

**Определение A.13.** *Пусть $X$ — измеримая по Лебегу случайная величина на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{E}$ — $\sigma$-алгебра, являющаяся подалгеброй $\mathcal{F}$, т.е. $\mathcal{F} \supset \mathcal{E}$. Тогда условным математическим ожиданием случайной величины $X$ относительно $\mathcal{E}$ называется любая $\mathcal{E}$-измеримая по Лебегу случайная величина $Y$, которая для всех $A \in \mathcal{E}$ удовлетворяет равенству*

$$\int_A X(\omega) dP = \int_A Y(\omega) dP.$$

Условное математическое ожидание $Y$ обозначается через $\mathsf{E}\left(X | \mathcal{E}\right)$.

Среди свойств условных математических ожиданий отметим следующие:

1. Пусть $X$ и $Y$ — измеримые по Лебегу случайные величины, а $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ — постоянные. Тогда
$$\mathsf{E}\left(\alpha X + \beta Y + \gamma | \mathcal{E}\right) = \alpha \mathsf{E}\left(X | \mathcal{E}\right) + \beta \mathsf{E}\left(Y | \mathcal{E}\right) + \gamma$$
почти наверное.

2. (Неравенство Иенсена) Предположим, что $\varphi$ — действительная выпуклая функция на всей действительной оси, а $X(\omega)$ — измеримая по Лебегу случайная величина такая, что $\varphi(X(\omega))$ — также измеримая по Лебегу случайная величина. Тогда
$$\varphi\left(\mathsf{E}\left(X | \mathcal{E}\right)\right) \leqslant \mathsf{E}\left(\varphi(X) | \mathcal{E}\right)$$
почти наверное.

3. Пусть $X$ — измеримая по Лебегу случайная величина, а $\mathcal{E}$ — $\sigma$-подалгебра $\mathcal{F}$. Тогда $X = \mathsf{E}\left(X | \mathcal{E}\right)$ почти наверное тогда и только тогда, когда $X$ является измеримой случайной величиной относительно алгебры $\mathcal{E}$.

4. Пусть $\mathcal{D}$ и $\mathcal{E}$ — $\sigma$-подалгебры $\mathcal{F}$ такие, что $\mathcal{D} \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{F}$. Тогда для любой измеримой по Лебегу случайной величины $X$ почти наверное выполнено соотношение
$$\mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left(X | \mathcal{E}\right) | \mathcal{D}\right) = \mathsf{E}\left(X | \mathcal{D}\right).$$

Заметим также, что для тривиальной $\sigma$-алгебры $\mathcal{D} = \{\Omega, \emptyset\}$ условное математическое ожидание совпадает с обычным: $\mathsf{E}\left(X | \mathcal{E}\right) = \mathsf{E}\left(X\right)$.

Далее широко используются понятия дисперсии $V(X) = \mathsf{E}\left(X^2\right) - \left(\mathsf{E}\left(X\right)\right)^2$ и ковариации $\operatorname{cov}(X, Y) = \mathsf{E}\left((X - \mathsf{E}\left(X\right))(Y - \mathsf{E}\left(Y\right))\right)$.

Со случайным вектором $X = (X_1, \ldots, X_d)^T$ связаны понятия его вектора среднего(математического ожидания) $\mathsf{E}\left(X\right) = (\mathsf{E}\left(X_1\right), \ldots, \mathsf{E}\left(X_d\right)$, ковариационной матрицы
$$\Sigma = \{\sigma_{i,j}\}_{i=1,j=1}^{d,d},$$
где $\sigma_{i,j} = \operatorname{cov}(X_i, X_j)$, плотности распределения $f(x_1, \ldots, x_d)$, т.е. такой функции, что для любого измеримого множества $A \subset \mathbb{R}^d$ выполнено соотношение
$$P(A) = \int_A f(x_1, \ldots, x_d) d\mu,$$
где $\mu$ — $d$-мерная мера Лебега.

**Определение A.14.** *Говорят, что случайный вектор* $X = (X_1, \dots, X_d)^T$ *распределен по многомерному нормальному закону со средним* $\mu$ *и матрицей ковариации* $\Sigma$ *(обозначая это через* $X \sim N(\mu, \Sigma)$*), если его плотность распределения при всех* $x \in \mathbb{R}^n$ *имеет вид*

$$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}(\det \Sigma)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right).$$

Среди свойств векторов, распределенных по многомерному нормальному закону, отметим следующее: если первые $l$ компонент вектора $X \sim N(\mu, \Sigma))$ и его последние $d-l$ компонент некоррелированы, т.е. $\sigma_{i,j} = 0$ для всех $i = 1, \dots, l; j = l+1, \dots, d$, то они независимы.

# Список литературы


[1] М.И.Дьяченко, П.Л. Ульянов Мера и интеграл. М.: Факториал, 1998.

[2] Р.Эллиотт Стохастический анализ и его приложения. М.: Мир, 1986.

[3] В.И. Крылов Приближенное вычисление интегралов. 2-е изд. М,: Наука, 1967.

[4] А.В. Мельников Риск-менеджмент: Стохастический анализ рисков в экономике финансов и страховании. М.: Анкил, 2001.

[5] А.В. Мельников, С.Н.Волков, М.Л.Нечаев Математика финансовых обязательств. М.: ВШЭ, 2001.

[6] T.Szabados Discrete variant of Ito's formula

[7] J.M.Steele Stochastic calculus and its financial applications. N.Y.:Springer, 2001.

[8] Стохастическая финансовая математика. Сб. статей под ред. А.Н. Ширяева. (Труды МИАН, т. 237). М.: Наука, 2002.

[9] А.Н.Ширяев Основы стохастической финансовой математики: Т.1.Факты и модели;Т.2.Теория. М.: Фазис, 1998.