наибольшую кривизну. Увеличение значения k_*, как и уменьшение значения β_{**}, ведет к сглаживанию дисперсионных кривых в этих областях.

Следует заметить, что для наследственно-упругого спектра теряют смысл понятия частоты запирания, так как $\chi_* = 0$, $\omega_* > 0$ не являются корнями уравнения (5) и частотного минимума, поскольку при движении вдоль ветви ω_* монотонно возрастает.

Таким образом, упруго-подобный спектр приближенно можно рассматривать как асимптотический для наследственно-упругого при $k_* \to 0$, $\beta_{**} >> 1$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Кожанова Т.В., Коссович Л.Ю.* Дисперсионные уравнения Релея—Лэмба. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1990. 21 с.
2. *Kaplunov J.D., Kossovich L.Ju., Nolde E.V.* Dinamics of Thin Walled Elasfic Bodies. Jan Diego: Academic Press, 1998.
3. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 284 с.
4. *Работнов Ю.И.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.

УДК 539.3

Н.С. Анофрикова, Ю.В. Шевцова

НИЗКОЧАСТОТНЫЕ ДЛИННОВОЛНОВЫЕ ТАНГЕНЦИАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ВЯЗКОПРУГОСТИ ДЛЯ СЛУЧАЯ ДВУХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

В данной работе результаты асимптотических методов исследования динамических задач для тонких упругих пластин и оболочек [1–3] применяются к случаю двухслойных пластин, выполненных из вязкоупругого материала. В основу исследования положена методика непосредственного вывода асимптотических приближений из точных трехмерных уравнений [4].

Рассмотрим бесконечную двухслойную пластину, каждый слой которой выполнен из вязкоупругого материала, свойства которого описываются моделью стандартного вязкоупругого тела. В l-м слое ($l = 1, 2$) введем декартову систему координат $(x_1^{(l)}, x_2^{(l)}, z^{(l)})$, совмещая плоскость $Ox_1^{(l)}x_2^{(l)}$ со срединной плоскостью слоя и направляя ось $z^{(l)}$ по нормали к срединной плоскости. Введем обозначения: $\sigma_{ij,l}$ —

напряжения, $u_{i,l}$ — перемещения в l-м слое пластины; $2h_l$ — толщина слоя.

Будем предполагать, что наружные поверхности пластины свободны от нагрузки. Тогда граничные условия на них имеют вид ($k = \overline{1,3}$)

$$\begin{aligned} &\text{при} \quad z^{(1)} = -h_1 \quad \sigma_{3k,1} = 0, \\ &\text{при} \quad z^{(2)} = h_2 \quad \sigma_{3k,2} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Граничные условия на стыке двух слоев пластины — условия непрерывного контакта — сформулируем следующим образом [5]:

$$\text{при} \quad z^{(2)} = -h_2, \quad z^{(1)} = h_1: \quad \sigma_{3k,2} = \sigma_{3k,1}, \quad u_{k,2} = u_{k,1}. \tag{2}$$

Приведем точные трехмерные динамические уравнения теории вязкоупругости для пластины. Уравнения движения возьмем в виде

$$\begin{gathered} \frac{\partial \sigma_{ii,l}}{\partial x_i^{(l)}} + \frac{\partial \sigma_{ji,l}}{\partial x_j^{(l)}} + \frac{\partial \sigma_{3i,l}}{\partial z^{(l)}} - \rho_l \frac{\partial^2 u_{i,l}}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{i3,l}}{\partial x_i^{(l)}} + \frac{\partial \sigma_{j3,l}}{\partial x_j^{(l)}} + \frac{\partial \sigma_{33,l}}{\partial z^{(l)}} - \rho_l \frac{\partial^2 u_{3,l}}{\partial t^2} = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

где ρ_l — плотность материала слоя.

Уравнения состояния для l-го слоя могут быть записаны следующим образом [6]:

$$\begin{gathered} E_l \left(\frac{1}{t_{2l}} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u_{i,l}}{\partial x_i} = \left[\frac{1}{3} \left(\frac{(1-2v_l)}{t_{2l}} + 2\frac{(1+v_l)}{t_{1l}} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \right] \sigma_{ii,l} + \\ + \left[\frac{1}{3} \left(\frac{(1-2v_l)}{t_{2l}} - \frac{(1+v_l)}{t_{1l}} \right) - v_l \frac{\partial}{\partial t} \right] (\sigma_{jj,l} + \sigma_{33,l}), \\ E_l \left(\frac{1}{t_{2l}} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u_{3,l}}{\partial z} = \left[\frac{1}{3} \left(\frac{(1-2v_l)}{t_{2l}} + 2\frac{(1+v_l)}{t_{1l}} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \right] \sigma_{33,l} + \\ + \left[\frac{1}{3} \left(\frac{(1-2v_l)}{t_{2l}} - \frac{(1+v_l)}{t_{1l}} \right) - v_l \frac{\partial}{\partial t} \right] (\sigma_{ii,l} + \sigma_{jj,l}), \\ \frac{E_l}{1+v_l} \left(\frac{1}{t_{2l}} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial u_{i,l}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{j,l}}{\partial x_i} \right) = \left(\frac{1}{t_{1l}} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma_{ij,l}, \\ \frac{E_l}{1+v_l} \left(\frac{1}{t_{2l}} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial u_{i,l}}{\partial z} + \frac{\partial u_{3,l}}{\partial x_i} \right) = \left(\frac{1}{t_{1l}} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma_{3i,l}, \\ (i \neq j = 1,2;\ l = 1,2), \end{gathered} \tag{4}$$

где t_{1l} — характерное время релаксации, t_{2l} — характерное время ползучести, E_l, v_l — мгновенные значения модуля Юнга и коэффициент Пуассона l-го слоя соответственно.

Произведем в уравнениях (3), (4) растяжение масштабов независимых переменных по формулам

$$x_i^{(l)} = L\eta_l^{q_l}\xi_i^{(l)}, \quad z^{(l)} = L\eta\zeta^{(l)}, \quad t = Lc_{2l}^{-1}\eta_l^{a_l}\tau_l, \tag{5}$$

где $\eta_l = h_l L^{-1}$ — малый параметр, L — характерный размер длины, q_l — показатель изменяемости, c_{2l} — скорость волны сдвига, a_l — показатель динамичности. Предположим, что дифференцирование по безразмерным переменным $\xi_i^{(l)}$, $\zeta^{(l)}$, τ_l не меняет асимптотический порядок неизвестных величин. Введение независимых переменных (5) позволяет методом асимптотического интегрирования трехмерных уравнений теории вязкоупругости вывести асимптотически приближенные уравнения для составляющих НДС при различных показателях изменяемости и динамичности. Остановимся на случае так называемых длинноволновых низкочастотных тангенциальных приближений. К этому виду относятся приближения, для которых $q_l < 1$, $a_l < 1$. Данный тип приближений соответствует теории растяжения тонких пластин. В этом случае тангенциальные компоненты вектора перемещений велики по сравнению с его нормальной компонентой $u_{i,l} >> u_{3,l}$.

Оценим величины времен ползучести и релаксации, вводя показатели их интенсивности по формулам

$$t_{il} = Lc_{2l}^{-1}\eta_l^{r_{il}}\tau_{il}, \tag{6}$$

и будем предполагать, что $r_{il} \le a_l$ $(i = 1, 2)$.

При построении тангенциального приближения показатели изменяемости и динамичности для каждого слоя связаны соотношением $q_l = a_l$. Введем следующие асимптотики для компонент НДС [7]:

$$\begin{gathered} u_{i,l} = L\eta_l^{q_l}u_{i,l}^0, \quad u_{3,l} = L\eta_l u_{3,l}^0, \quad \sigma_{ii,l} = E_l\sigma_{ii,l}^0, \quad \sigma_{ij,l} = E_l\sigma_{ij,l}^0, \\ \sigma_{3i,l} = E_l\eta_l^{1-q_l}\sigma_{3i,l}^0, \quad \sigma_{33,l} = E_l\eta_l^{2-2q_l}\sigma_{33,l}^0 \quad (i, j = 1, 2). \end{gathered} \tag{7}$$

Предполагается, что величины с индексом «0» имеют один и тот же асимптотический порядок.

В силу выбора асимптотик (7) в уравнения движения, записанные с учетом (5), (6) в рамках погрешности $O(\eta_l^{2-2q_l})$, входят слагаемые, содержащие производные по $\zeta^{(l)}$ от $\sigma_{3i,l}^0$ $(i = \overline{1,3})$. Такой выбор асимптотик позволяет удовлетворить всем граничным условиям на лицевых поверхностях при асимптотическом интегрировании.

Введем следующую зависимость компонент НДС от нормальной координаты:

$$u^0_{i,l} = u^{(0)}_{i,l}, \quad u^0_{3,l} = u^{(0)}_{3,l} + \zeta v^{(1)}_{3,l}, \quad \sigma^0_{ii,l} = \sigma^{(0)}_{ii,l}, \quad \sigma^0_{ij,l} = \sigma^{(0)}_{ij,l},$$
$$\sigma^0_{3i,l} = \sigma^{(0)}_{3i,l} + \zeta\sigma^{(1)}_{3i,l}, \quad \sigma^0_{33,l} = \sigma^{(0)}_{33,l} + \zeta\sigma^{(1)}_{33,l} + \zeta^2\sigma^{(2)}_{33,l}, \tag{8}$$

где величины с индексами в скобках не зависят от $\zeta^{(l)}$.

Переход в граничных условиях (1), (2) к представлениям (7), (8) позволяет установить связь между компонентами НДС первого и второго слоев.

В результате асимптотического интегрирования получена система относительно асимптотически главных компонент НДС $u^{(0)}_{i,l}$, $\sigma^{(0)}_{ii,l}$, $\sigma^{(0)}_{ij,l}$, $\sigma^{(0)}_{i3,l}$, $\sigma^{(1)}_{i3,l}$ и система, определяющая асимптотически второстепенные компоненты через асимптотически главные.

Приведем вид размерной двумерной формы записи полученной системы для асимптотически главных компонент НДС. Введем перемещения u_i, усилия T_i, S_{ij} и усредненную плотность ρ по формулам

$$u_{i,1} = u_{i,2} = u_i, \quad T_i = 2(h_1\sigma_{ii,1} + h_2\sigma_{ii,2}), \quad S_{ij} = 2(h_1\sigma_{ij,1} + h_2\sigma_{ij,2}),$$
$$\rho = \frac{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2}{h}, \quad h = h_1 + h_2. \tag{9}$$

С учетом (9) система разрешающих уравнений для асимптотически главных компонент НДС имеет вид

$$\frac{\partial T_i}{\partial x_i} + \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} - 2\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0,$$

$$\left[\frac{h_1E_1}{1+v_1}f_{12}f_{21} + \frac{h_2E_2}{1+v_2}f_{11}f_{22}\right]\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = f_{11}f_{12}S_{ij},$$

$$2[h_1E_1(f_{32}+f_{42})f_{21} + h_2E_2(f_{31}+f_{41})f_{22}]\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right) =$$
$$= (f_{31}+f_{41})(f_{32}+f_{42})(T_i+T_j),$$

где $f_{il} = \left(\frac{1}{t_{il}} + \frac{\partial}{\partial t}\right)$, $f_{3l} = \frac{1}{3}\left(\frac{1-2v_l}{t_{2l}} + 2\frac{1+v_l}{t_{1l}}\right) + \frac{\partial}{\partial t}$, $f_{4i} = \frac{1}{3}\left(\frac{1-2v_l}{t_{2l}} - \frac{1+v_l}{t_{1l}}\right) -$ $- v_l\frac{\partial}{\partial t}$, $i \neq j = 1, 2$, $l = 1, 2$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Kaplunov Ju.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V.* Dynamics of thin walled elastic bodies. London: Academic Press, 1998. 226 p.

2. *Коссович Л.Ю.* Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1986. 176 с.

3. *Коссович Л.Ю., Каплунов Ю.Д.* Асимптотический анализ нестационарных упругих волн // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2001. Т. 1. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 2. С. 111–131.

4. *Каплунов Ю.Д., Кириллова И.В., Коссович Л.Ю.* Асимптотическое интегрирование динамических уравнений теории упругости для случая тонких оболочек // ПММ. 1993. Т. 57, вып. 1. С. 83–91.

5. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1971.

6. *Новацкий В.* Динамика сооружений. М.: Госстройиздат, 1963. 376 с.

7. *Коссович Л.Ю., Шевцова Ю.В.* Асимптотические приближения трехмерных динамических уравнений теории упругости в случае двухслойных пластин // Проблемы прочности и пластичности: межвуз. сб. науч. тр. Н.Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 2005. Вып. 67. С. 102–111.

УДК 533.6.011

Э.В. Антоненко, Н.А. Привалова

МОДЕЛИ СТАНДАРТНОЙ АТМОСФЕРЫ

Использование летательных аппаратов (ЛА) в различных странах мира связано с единым подходом к аэродинамическому и баллистическому расчетам. Эти расчеты определяют летные и летно-тактические качества ЛА, их прочность и допускаемые перегрузки.

Параметры атмосферы и ближнего космоса, определяющие нагрузки и прочность ЛА, зависят от географического положения, времени года, суток, от случайных метеорологических условий. Испытания ЛА требуется приводить к одинаковым условиям. Появилась необходимость создания некоторой условной стандартной атмосферы (СА), являющейся моделью действительной атмосферы, в которой отсутствуют колебания, связанные с метеорологическими или астрономическими факторами. Такие СА в различных странах мира появились в начале XX в. в виде таблиц и формул, позволяющих найти температуру T, давление p, плотность ρ, скорость звука и другие характеристики газовой среды для любой заданной высоты H. Они отражают некоторое среднее состояние атмосферы.

В основе закономерностей, принятых в СА, лежит закон изменения температуры по высоте, найденный из опытов. Используя его, уравнение состояния и уравнение равновесия элементарного объема воздуха [1] в плотных слоях атмосферы

$$p = \rho RT, \ dp = -g\rho dH,$$