БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Юрко В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.

2. *Yurko V.A.* Inverse problems for matrix Sturm—Liouville operators // Russian J. of Mathematical Physics. 2006. Vol. 13, №1. P. 111–118.

3. *Yurko V.A.* Inverse problems for the matrix Sturm—Liouville equation on a finite interval // Inverse Problems.2006. Vol. 22. P. 1139–1149.

4. *Бондаренко Н.П.* Необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи для матричного уравнения Штурма—Лиувилля // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. Вып. 11. С. 3–5.

5. *Chelkak D., Korotyaev E.* Weyl-Titchmarsh functions of vector-valued Sturm—Liouville operators on the unit interval // J. of Functional Analysis. 2009. Vol. 257, is. 5. P. 1546–1588.

УДК 519.4

Д.А. Бредихин

О КЛАССАХ АЛГЕБР ОТНОШЕНИЙ С ОПЕРАЦИЯМИ ЦИЛИНДРОФИКАЦИИ

Множество бинарных отношений Φ, замкнутое относительно некоторой совокупности Ω операций над ними, образует алгебру (Φ, Ω), называемую *алгеброй отношений*. Всякая такая алгебра может быть рассмотрена как упорядоченная отношением теоретико-множественного включения $\subset$. Теория алгебр отношений является существенной составной частью современной алгебраической логики. Основы абстрактно-алгебраического подхода к изучению алгебр отношений были заложены в работах А. Тарского [1, 2]. Им были рассмотрены алгебры отношений вида $(\Phi, \circ, ^{-1}, \cup, \cap, ^{-}, \Delta, \emptyset, U)$, где $\circ$, $^{-1}$ – операции умножения и обращения отношений; $\cup$, $\cap$, $^{-}$ – булевы операции объединения, пересечения и дополнения; Δ – тождественное, $\emptyset$ и U – пустое и универсальное отношения, рассматриваемые как нульарные операции. Существует ряд других важных операций над отношениями. К таковым, в частности, относятся операции цилиндрофикации [3], играющие существенную роль в алгебраической логике и определяемые следующим образом:

$$\nabla_1(\rho) = \{(x, y) : (\exists z)(x, z) \in \rho\}, \quad \nabla_2(\rho) = \{(x, y) : (\exists z)(z, y) \in \rho\}.$$

Для заданного множества Ω операций над бинарными отношениями обозначим через $R\{\Omega\}$ $(R\{\Omega, \subset\})$ класс алгебр (упорядоченных алгебр), изоморфных алгебрам отношений с операциями из Ω. Пусть $Q\{\Omega\}$ ($Var\{\Omega, \subset\}$) – квазимногообразие и $Q\{\Omega\}$ ($Var\{\Omega, \subset\}$) – многообразие, порожденное классом $R\{\Omega\}$ ($R\{\Omega, \subset\}$). Одной из основных задач теории алгебр отношений является аксиоматизация указанных классов алгебр для различных совокупностей операций над алгебрами отношений. Нами будут рассмотрены классы алгебр отношений с множеством операций $\Omega \subset \{\circ, \cap, \cup, \nabla_1, \nabla_2\}$.

Введем ряд определений, необходимых для формулировки основных результатов. Под *упорядоченной алгеброй* мы будем понимать алгебру, на базисном множестве которой задано отношение порядка $\leq$, согласованной с операциями этой алгебры. *Полурешеточно упорядоченной полугруппой* называется алгебра $(A, \cdot, \wedge)$ типа $(2, 2)$, где $(A, \cdot)$ – полугруппа и $(A, \wedge)$ – полурешетка, каноническое отношение порядка $\leq$ которой согласовано с операцией умножения этой полугруппы. *Решеточно упорядоченной полугруппой* называется алгебра $(A, \cdot, \vee, \wedge)$ типа $(2, 2, 2)$, где $(A, \cdot, \wedge)$ – полурешеточно упорядоченная полугруппа и $(A, \cdot, \vee, \wedge)$ – решетка. Элемент 0 называется *нулевым элементом упорядоченной полугруппы* $(A, \cdot, \leq)$, если $x0 = 0x = 0$ и $0 \leq x$ для любого x из A. Заметим, что если такой элемент существует, то он определяется однозначно.

Сформулируем ряд ранее полученных результатов для классов алгебр отношений с множеством операций $\Omega \subset \{\circ, \cap, \cup, \nabla_1, \nabla_2\}$. Общеизвестно, что класс $R\{\circ\}$ совпадает с многообразием всех полугрупп. В работе [4] показано, что класс $R\{\circ, \cap\}$ совпадает с классом всех полурешеточно упорядоченных полугрупп. Конечные базисы тождеств для многообразий $V\{\circ, \cup, \cap\}$, $V\{\circ, \nabla_1\}$, $Q\{\circ, \nabla_2\}$, $V\{\circ, \nabla_1, \subset\}$, $V\{\circ, \nabla_2, \subset\}$, $V\{\circ, \nabla_1, \cup\}$, $V\{\circ, \nabla_2, \cup\}$ были найдены в работах [5–11].

Основные результаты статьи формулируются в следующих теоремах.

Теорема 1. *Квазимногообразие $Q\{\circ, \nabla_1, \subset\}$ образует многообразие в классе всех упорядоченных алгебр типа $(2, 1)$. Упорядоченная алгебра $(A, \cdot, ^*, \leq)$ типа $(2, 1)$ принадлежит квазимногообразию $Q\{\circ, \nabla_1, \subset\}$ тогда и только тогда, когда $(A, \cdot)$ – полугруппа и выполняются следующие тождества:*

$$(x^*)^* = x^*, \tag{1}$$

$$(xy)^* = xy^*, \tag{2}$$

$$x \leq x^* x, \tag{3}$$

$$x^* y \leq x^*. \tag{4}$$

Теорема 2. *Квазимногообразие* $Q\{\circ, \nabla_2, \subset\}$ *образует многообразие в классе всех упорядоченных алгебр типа* $(2,1)$. *Упорядоченная алгебра* $(A, \cdot, ^*, \leq)$ *типа* $(2,1)$ *принадлежит квазимногообразию* $Q\{\circ, \nabla_2, \subset\}$ *тогда и только тогда, когда* $(A, \cdot)$ *– полугруппа и выполняются следующие тождества:*

$$(x^*)^* = x^*, \tag{1'}$$

$$(xy)^* = x^*y, \tag{2'}$$

$$x \leq xx^*, \tag{3'}$$

$$xy^* \leq y^*. \tag{4'}$$

Теорема 3. *Класс* $R\{\circ, \nabla_1, \subset\}$ *не является квазимногообразием. Упорядоченная алгебра* $(A, \cdot, ^*, \leq)$ *принадлежит классу* $R\{\circ, \nabla_1, \subset\}$ *тогда и только тогда, когда она принадлежит квазимногообразию* $Q\{\circ, \nabla_1, \subset\}$ *и удовлетворяет аксиоме*

$$y, z \neq 0 \Rightarrow x^*y = x^*z. \tag{5}$$

Теорема 4. *Класс* $R\{\circ, \nabla_2, \subset\}$ *не является квазимногообразием. Упорядоченная алгебра* $(A, \cdot, ^*, \leq)$ *принадлежит классу* $R\{\circ, \nabla_2, \subset\}$ *тогда и только тогда, когда она принадлежит квазимногообразию* $Q\{\circ, \nabla_2, \subset\}$ *и удовлетворяет аксиоме*

$$x, y \neq 0 \Rightarrow xz^* = yz^*. \tag{5'}$$

Теорема 5. *Квазимногообразие* $Q\{\circ, \cap, \nabla_1\}$ *является многообразием. Алгебра* $(A, \cdot, \wedge, ^*)$ *типа* $(2,2,1)$ *принадлежит квазимногообразию* $Q\{\circ, \cap, \nabla_1\}$ *тогда и только тогда, когда* $(A, \cdot, \wedge)$ *– полурешеточно упорядоченная полугруппа, выполняются тождества (1)–(4) и*

$$(x^* \wedge y)z = x^*z \wedge yz), \tag{6}$$

$$x(y \wedge z^*) = xy \wedge z^*). \tag{7}$$

Теорема 6. *Квазимногообразие* $Q\{\circ, \cap, \nabla_2\}$ *является многообразием. Алгебра* $(A, \cdot, \wedge, ^*)$ *типа* $(2,2,1)$ *принадлежит квазимногообразию* $Q\{\circ, \cap, \nabla_2\}$ *тогда и только тогда, когда* $(A, \cdot, \wedge)$ *–*

полурешеточно упорядоченная полугруппа, выполняются тождества (1)–(4) и

$$x(y \wedge z^*)z = xy \wedge z^*, \tag{6'}$$

$$(x^* \wedge y)z = x^*z \wedge yz. \tag{7'}$$

Теорема 7. *Алгебра* $(A, \cdot, \wedge, ^*)$ *типа* $(2, 2, 1)$ *принадлежит классу* $R\{\circ, \cap, \nabla_1\}$ *тогда и только тогда, когда* $(A, \cdot, \wedge)$ *принадлежит квазимногообразию* $Q\{\circ, \cap, \nabla_1\}$ *и выполняется аксиома (5).*

Теорема 8. *Алгебра* $(A, \cdot, \wedge, ^*)$ *типа* $(2, 2, 1)$ *принадлежит классу* $R\{\circ, \cap, \nabla_2\}$ *тогда и только тогда, когда* $(A, \cdot, \wedge)$ *принадлежит квазимногообразию* $Q\{\circ, \cap, \nabla_2\}$ *и выполняется аксиома (5').*

Следствие 8. *Алгебра* $(A, \cdot, \vee, \wedge, ^*)$ *типа* $(2, 2, 2, 1)$ *принадлежит многообразию* $R\{\circ, \cup, \cap, \nabla_1\}$ *тогда и только тогда, когда* $(A, \cdot, \vee, \wedge)$ *– решеточно упорядоченная полугруппа,* $(A, \vee, \wedge)$ *– дистрибутивная решетка,* $(A, \cdot, \wedge)$*принадлежит многообразию* $V\{\circ, \cap, \nabla_1\}$ *и выполняются тождества*

$$(x \vee y)z = xy \vee yz, \tag{8}$$

$$x(y \vee z) = xy \vee xz, \tag{9}$$

$$(x \vee y)^* = x^* \vee y^*. \tag{10}$$

Следствие 9. *Алгебра* $(A, \cdot, \vee, \wedge, ^*)$ *типа* $(2, 2, 2, 1)$ *принадлежит многообразию* $R\{\circ, \cup, \cap, \nabla_2\}$ *тогда и только тогда, когда* $(A, \cdot, \vee, \wedge)$ *– решеточно упорядоченная полугруппа,* $(A, \vee, \wedge)$ *– дистрибутивная решетка,* $(A, \cdot, \wedge)$ *принадлежит многообразию* $V\{\circ, \cap, \nabla_2\}$ *и выполняются тождества (8)–(10).*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Tarski A.* On the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1941. Vol. 6. P. 73–89.

2. *Tarski A.* Some methodological results concerning the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1953. Vol. 18. C. 188–189.

3. *Henkin L, Monk J.D., Tarski A.* Cylindric algebras I, II. North-Holland. Amsterdam, 1971, 1985.

4. *Bredikhin D.A., Schein B.M.* Representations of ordered semigroups and lattices by binary relations // Colloq. Math. 1978. Vol. 49. P. 2–12.

5. *Andreka H., Bredikhin D.A.* The equational theory of union-free algebras of relations // Alg. Univers. 1994. Vol. 33. P. 516–532.

6. *Бредихин Д.А.* Эквациональная теория алгебр отношений с позитивными операциями // Изв. вузов. Сер. Математика. 1993. № 3. С. 23–30.

7. *Bredikhin D.A.* On varieties of semigroups of relations with operations of cylindrofication // Contributions to General Algebra. 2005. Vol. 16. P. 1–6.

8. *Бредихин Д.А.* О квазитождествах алгебр отношений с диофантовыми операциями // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38. С. 29–41.

9. *Бредихин Д.А.* Об алгебрах отношений с диофантовыви операциями // Докл. РАН. 1998. Т. 360. С. 594–595.

10. *Бредихин Д.А.* О редуктах алгебр отношений Тарского // Алгебра и логика. 1998. № 1. С. 3–16.

11. *Bredikhin D.A.* On classes of Omega-semigroups // Semigroups with Applications, Including Semigroup Rings / St-Petersburg State University of Technology. St-Patersburg, 1999. P. 59–62.

УДК 514.763

А.В. Букушева, С.В. Галаев

УСЛОВИЕ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ МЕТРИКИ БЕРВАЛЬДА—МООРА

В работах [1, 2] было положено начало исследованиям пространств вида (P_n, g), где P_n – алгебра поличисел с заданной на ней n-линейной симметрической формой. На пути обобщения заложенных в этих работах идей естественно было бы рассмотреть гладкие многообразия с подходящей полиаффинорной структурой. Довольно развитая сейчас геометрия пространств над алгебрами имеет обширную библиографию [3]. В обзоре [4], подготовленном В.В. Вишневским, содержатся сведения по интегрируемым аффинорным структурам. В настоящей статье излагаются условия, при которых метрика Бервальда—Моора (БМ), согласованная с полиаффинорной структурой, заданной на гладком многообразии, задается с помощью интегрируемой полиформы.

1. Алгебраические метрики, согласованные с полиаффинорной структурой AH_n

Алгебра поличисел P_n является обобщением алгебры двойных чисел. В алгебре поличисел P_n существует базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ такой, что

$$\vec{e}_\alpha \vec{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \vec{e}_\alpha.$$

В работе [1] в алгебре P_n как на дифференцируемом многообразии специальным образом вводится согласованная с алгебраической структурой метрика БМ. В результате задания метрики БМ, алгебра поличисел становится финслеровым пространством, обозначаемым H_n . Пусть M – связное C^∞-многообразие размерности n. Все встречающиеся на M функции и геометрические объекты будем считать бесконечно дифференцируемыми.