$I\left(\theta^*\right)=\{2,\ldots,n\}$, что легко приводит к однозначным соответствующим вариантам решения.

Замечание 1. *В варианте 2) теоремы, если* $m_p > > \left(\gamma - m_n/\sigma_n\right)/\left(\nu - 1/\sigma_n\right)$, *то* ${\theta_n}^* < 0$, *соответственно в варианте 3), если* $m_p < \left(\gamma - m_1/\sigma_1\right)/\left(\nu - 1/\sigma_1\right)$, *то* ${\theta_1}^* < 0$.

Замечание 2. *При экономической интерпретации задачи считаем* $m_n \le m_p \le m_1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-4383.2010.1) и РФФИ (проект 10-01-00270).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.

УДК 517.54

В.Г. Гордиенко

О СЕДЛОВОЙ ТОЧКЕ ФУНКЦИОНАЛА $\mathbf{a_3 - \alpha a_2^2}$ В КЛАССЕ $\mathbf{S^M}$

Обозначим через S – класс голоморфных однолистных в единичном круге $E=\{z:\ |z|<1\}$ функций

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots, \tag{1}$$

а через S^M, $M>1$, — подкласс, состоящий из всех ограниченных функций $f\in S$, удовлетворяющих ограничению $|f(z)|<M$, $z\in E$.

Проблема коэффициентов однолистных функций заключается в исследовании множеств значений систем начальных коэффициентов разложения (1). В работе [1] описан характер седловой точки множества $V_3=\{(\operatorname{Re}a_2,\operatorname{Im}a_2,\ \operatorname{Re}a_3):f\in S\}$, доставляемой функцией

$$K_2(z)=\frac{z}{1-z^2}=\sum_{n=1}^{\infty}z^{2n-1}\in S.$$

В настоящей статье алгоритм, предложенный авторами указанной работы, используется для описания характера седловой точки множества $V_3(M)=\{(\operatorname{Re}a_2,\operatorname{Im}a_2,\operatorname{Re}(a_3-\alpha a_2^2)):f\in S^M,\ \alpha\in R\}$, доставляемой функцией

$$K_{2M}=z+(1-1/M^2)z^3+\ldots$$

Функция K_{2M} соответствует точке $(0,0,1-1/M^2)$ на границе множества $V_3(M)$ и отображает единичный круг E на круг радиуса M с двумя прямолинейными разрезами. Известно [2], что все функции $f \in S^M$, отображающие единичный круг E на круг радиуса M с двумя кусочно аналитическими разрезами, можно представить в виде $f(z) = Mw(z, \log M)$, где $w(z,t) = e^{-t}(z + a_2(t)z^2 + \ldots)$ является интегралом обобщенного дифференциального уравнения Левнера:

$$\frac{dw}{dt} = -w \sum_{k=1}^{2} \lambda_k \frac{e^{iu_k} + w}{e^{iu_k} - w}, w|_{t=0} = z, 0 \le t \le \log M, \tag{2}$$

с непрерывными функциями $u_k = u_k(t)$, $k = 1, 2$, и постоянными числами $\lambda_k \ge 0$, $k = 1, 2$, $\sum\limits_{k=1}^{2} \lambda_k = 1$. Кроме того, управляющие функции u_k удовлетворяют необходимым условиям оптимальности скользящего режима. Пусть $a_k(t)$, $k \ge 2$, определяются разложением (1). Совершим замену переменной $t \longrightarrow 1 - e^{-t}$ и обозначим $x_1(t) = \operatorname{Re} a_2(t)$, $x_2(t) = \operatorname{Im} a_2(t)$, $x_3(t) = \operatorname{Re}(a_3 - \alpha a_2^2)$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z в равенстве (2), после произведенной замены, получим управляемую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = -2[\lambda \cos u_1 + (1-\lambda)\cos u_2], x_1(0) = 0,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 2[\lambda \sin u_1 + (1-\lambda)\sin u_2], x_2(0) = 0,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -4x_1(1-\alpha)[\lambda \cos u_1 + (1-\lambda)\cos u_2] - 4x_2(1-\alpha)[\lambda \sin u_1 +$$
$$+ (1-\lambda)\sin u_2] + 2(t-1)[\lambda \cos 2u_1 + (1-\lambda)\cos 2u_2], x_3(0) = 0, \tag{3}$$

$0 \le t \le 1 - 1/M$, $0 \le \lambda \le 1$, с непрерывными управляющими функциями u_1 и u_2.

Обозначим правые части системы (3) через

$$\lambda g_k(t, x, u_1) + (1-\lambda) g_k(t, x, u_2), \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad k = 1, 2, 3,$$

и составим функцию Гамильтона $H(t, x, \Psi, u) = \sum\limits_{k=1}^{3} g_k(t, x, u)\Psi_k$, где $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$, $\Psi_3 = 1$, а Ψ_1 и Ψ_2 являются решением сопряженной системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\Psi_1}{dt} = 4(1-\alpha)[\lambda \cos\, u_1 + (1-\lambda)\cos\, u_2],$$

$$\frac{d\Psi_2}{dt} = 4(1-\alpha)[\lambda \sin\, u_1 + (1-\lambda)\sin\, u_2]. \tag{4}$$

Непрерывные управления u_1 и u_2 удовлетворяют принципу максимума Понтрягина вдоль траектории $x(t)$, а вектор $\Psi(t)$ – условиям трансверсальности $\Psi_j(1 - 1/M) = 0$, $j = 1, 2$.

Функции $K_{2M}(z)$ соответствуют значения $\lambda = 1/2$, $u_1 = \pi/2$, $u_2 = -\pi/2$ в управляемой системе (3), следовательно, $x_1(t) = 0$, $x_2(t) = 0$, $x_3(t) = 2t - t^2$, $0 \leq t \leq 1 - 1/M$. Этим же значениям параметров λ, u_1 и u_2 отвечают нулевые сопряженные координаты $\Psi_1(t) = \Psi_2(t) = 0$. Покажем, что точка граничной поверхности множества $V_3(M)$, доставляемая функцией $K_{2M}(z)$, является седловой, и исследуем ее характер. Граничные точки множества $V_3(M)$ из окрестности точки, доставляемой функцией $K_{2M}(z)$, описываются при помощи варьирования параметров λ, $\xi_1 = \Psi_1(0)$, $\xi_2 = \Psi_2(0)$ в системах (3) и (4) с условиями сохранения скользящего режима [2, теор. 1]. Поскольку

$$H(0, 0, \xi, u) = -2\xi_1 \cos u + 2\xi_2 \sin u - 2 \cos 2u,$$

то известно [1], что она достигает максимума в двух точках отрезка $[-\pi; \pi]$ лишь при условии $\xi_2 = \Psi_2(0) = 0$. Таким образом, окрестность точки, соответствующей функции $K_{2M}(z)$, параметризуется двумя переменными (p, q) из окрестности точки $(0, 0)$, где $\lambda = 1/2 + p$ и $\xi_1 = \Psi_1(0) = q$.

Пусть $F^M(p, q) : (p, q) \to x_3(1 - 1/M)$, $F^M(0, 0) = 1 - 1/M^2$, где $p = \lambda - 1/2$ и $q = \Psi_1(0)$ в системах (3) и (4). Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Функция F^M имеет в точке $(0, 0)$ при $\alpha > 1$ локальный минимум по переменному p и локальный максимум по переменному q, при $\alpha < 1$ локальный максимум по переменному p и локальный минимум по переменному q при выполнении неравенства $M > e^{\frac{1}{1-\alpha}}$.*

Доказательство. Дифференцируя третье уравнение системы (3) по переменным p и q , непосредственной проверкой установим, что

$$\frac{d(x_3)_p}{dt}\Big|_{(p,q)=(0,0)} = \frac{d(x_3)_q}{dt}\Big|_{(p,q)=(0,0)} = 0,$$

и, следовательно, $(x_3)_p(1 - 1/M) = (x_3)_q(1 - 1/M) = 0$ в точке $(p, q) = (0, 0)$. Вычислим теперь частные производные второго порядка функции $F^M(p,q)$ в точке $(0,0)$, получим

$$\left.\frac{d(x_3)_{pp}}{dt}\right|_{(p,q)=(0,0)} = 8(x_1)_p(1-\alpha)(u_1)_p - 16(x_2)_p(1-\alpha) + 8(t-1)(u_1)_p^2, \quad (x_3)_{pp}(0)=0, \tag{5}$$

$$\left.\frac{d(x_3)_{qq}}{dt}\right|_{(p,q)=(0,0)} = 8(x_1)_q(1-\alpha)(u_1)_q + 8(t-1)(u_1)_q^2, \quad (x_3)_{qq}(0)=0. \tag{6}$$

Оптимальная управляющая функция u_1 удовлетворяет принципу максимума Понтрягина, т.е. при всех (p,q) является корнем уравнения

$$H_u(t,x,\Psi,u)=0.$$

Дифференцируя последнее равенство по p и q, находим, что

$$(u_1)_p = -\frac{(\Psi_1)_p + 2(x_1)_p(1-\alpha)}{4(t-1)}, \qquad (u_1)_q = -\frac{(\Psi_1)_q + 2(x_1)_q(1-\alpha)}{4(t-1)}.$$

Вычисляя далее частные производные функций x_1, x_2, Ψ_1 по переменным p и q, элементарными средствами дифференциального исчисления решения задач на экстремум из равенств (5) и (6) получим утверждение теоремы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Захаров А.М., Прохоров Д.В.* Седловые точки множества начальных коэффициентов однолистных функций // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун.-та, 2003. Вып. 5. С. 33–36.

2. *Прохоров Д.В.* Множества значений систем функционалов в классах однолистных функций // Мат. сб. 1990. Т. 181, № 12. С. 1659–1667.

УДК 517.518.82

С.И. Дудов, Е.В. Сорина

СРАВНЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВНЕШНЕЙ ОЦЕНКЕ СЕГМЕНТНОЙ ФУНКЦИИ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ПОЛОСОЙ С ЗАДАЧЕЙ БЛ. СЕНДОВА

Пусть сегментная функция (с.ф.) $F(t) = [f_1(t), f_2(t)]$ задана на отрезке $[c,d]$ двумя непрерывными функциями $f_1(t)$ и $f_2(t)$, причём $f_1(t) \le f_2(t)$ при $t \in [c,d]$. Далее под $P_n(A,t) = a_0 + a_1 t+$