БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Beals R., Deift P., Tomei C.* Direct and inverse scattering on the line // Math. Surveys and Monographs. Vol. 28, Amer. Math. Soc, Providence: RI, 1988.

2. *Юрко В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.

3. *Левитан Б.М.* Обратные задачи Штурма—Лиувилля. М.: Наука, 1984.

УДК 517.51

Т.В. Иофина

СИЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ В РАВНОМЕРНОЙ И ГЕЛЬДЕРОВЫХ МЕТРИКАХ

Пусть $\{\chi_j\}_{j=0}^{\infty}$ – система Виленкина, построенная по ограниченной последовательности $\mathbf{P} = \{p_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{N}$ [1, §1.5]. Коэффициенты Фурье и частичная сумма Фурье для $f \in L[0,1)$ задаются формулами $\hat{f}(k) = \int_0^1 f(x)\overline{\chi_k(x)}\,dx$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\chi_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Будем рассматривать пространства $L^p[0,1)$, $1 \le p < \infty$, $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$, и $C^*[0,1)$ – пространство функций, непрерывных относительно $\mathbf{P}$-ичного сдвига, $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1)} |f(x)|$. Пусть $\omega^*(f,\delta)_p = \sup\limits_{0<h<\delta} \|f(x\ominus h)-f(x)\|_p$ – модуль непрерывности в этих пространствах. Будем говорить, что $\omega \in \Omega$, если $\omega(\delta)$ непрерывна и возрастает на [0,1), $\omega(0) = 0$. Тогда $f \in H_p^\omega[0,1)$, если $f \in L_p[0,1)$ $(1 \le p < \infty)$ или $f \in C^*[0,1)$ $(p = \infty)$ и $\omega^*(f,\delta)_p \le C\omega(\delta)$; $\|f\|p,\omega = \|f\|_p + \sup\limits_{0<h<1} \omega^*(f,h)_p/\omega(h)$.

Далее будем считать, что $\omega(t) \in \Omega$ удовлетворяет Δ_2-условию, т.е. $\omega(t) \le C\omega(t/2)$, $t \in [0,1)$. Кроме того, для $\omega(t), \mu(t) \in \Omega$ существует $\alpha \in (0,1)$ такое, что $\omega^\alpha(t)/\mu(t)$ ограничена на [0,1).

Определим класс GM последовательностей $\{d_i\}_{i=0}^{\infty}$, удовлетворяющих неравенству $\sum\limits_{k=m}^{2m-1} |d_k - d_{k+1}| \le Cd_m$. Пусть MRBVS – класс последовательностей $\{d_i\}_{i=0}^{\infty}$, для которых верно $\sum\limits_{k=2m}^{n-1} |d_k - d_{k+1}| \le K \sum\limits_{k=m}^{2m-1} \frac{d_k}{m+1}$, $1 \le m \le \le (n-1)/2$. Эти классы изучались С.Ю. Тихоновым. В частности, им было показано, что квазимонотонные последовательности $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ (такие, что $a_n n^{-\tau} \downarrow 0$ для некоторых $\tau \ge 0$ и $n \in \mathbb{N}$) содержаться в GM. Ему же принадлежит идея доказательства того факта, что данный класс и класс GM не содержат друг друга (см. леммы 1, 2).

Пусть $A = \{a_{nk}\}_{n,k=0}^{\infty}$ – нижнетреугольная неотрицательная матрица, такая что $\sum_{k=1}^{n} a_{nk} = 1$, $n \in \mathbb{N}$, и $\sum_{k=2m}^{n-1} |a_{nk} - a_{n,k+1}| \le K \frac{1}{m+1} \sum_{k=m}^{2m-1} a_{nk}$, $1 \le m \le (n-1)/2$.

В данной статье приведены оценки следующих величин $R_n(f,r)(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{nk} |S_k(f)(x) - f(x)|^r \right)^{1/r}$, для которых строки матрицы A принадлежат классу MRBVS.

Лемма 1. *Последовательность* $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, \dots, a_{99}, 0, a_{101}, \dots\}$, *где* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– произвольная неотрицательная убывающая последовательность, не принадлежит классу GM, однако* $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ *входит в класс* MRBVS.

Доказательство. Первое утверждение очевидно, так как $d_{100} = 0 \le \sum_{i=100}^{200} |d_i - d_{i+1}|$. Для доказательства второго утверждения проверим оценку $d_n \asymp \sum_{k=n}^{\infty} |d_k - d_{k+1}|$. При $n > 100$ оценка превращается в равенство, при $n < 100$ $\sum_{k=n}^{\infty} |d_k - d_{k+1}| = a_n + 2a_{101}$, $a_n < \sum_{k=n}^{\infty} |d_k - d_{k+1}| \le 3a_n$.

При $n < 100$ и $n > 200$ получаем $2\sum_{k=n/2}^{n} \frac{d_k}{n} > d_n$, так как $\{d_n\}$ убывает. При $100 \le n \le 200$ $2\sum_{k=n/2}^{n} \frac{d_k}{n} \ge 2\left(\sum_{k=n/2}^{n} \frac{a_k}{n} - \frac{a_n}{n} \right) > a_n(n - 1)/n > d_n/2$. Из последних неравенств и асимптотической оценки следует утверждение леммы.

Далее будем использовать обозначение $A \asymp B$, если существуют такие константы c_1, c_2, что верно $c_1 A \le B \le C_2 A$.

Лемма 2. *Пусть последовательность* $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ *определена следующим образом: при* $n \in [2^{\nu}, 2^{\nu+1})$

$$d_n = \begin{cases} \nu^{-\alpha}; & n - \textit{четное}; \\ \nu^{-\alpha}(1 - 2^{-\nu}); & n - \textit{нечетное}, \end{cases}$$

где $\alpha > 1$. *Тогда* $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} \in GM$ *и* $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} \notin$ MRBVS.

Доказательство. Покажем, что $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} \in GM$.

В силу теоремы Лагранжа о среднем справедлива следующая оценка:

$$|\Delta d_{2^{\nu+1}-1}| = \nu^{-\alpha}(1 - 2^{-\nu}) - (\nu+1)^{-\alpha} = \nu^{-\alpha} - (\nu+1)^{-\alpha} - \nu^{\alpha} 2^{-\nu}) \asymp \nu^{-\alpha-1}.$$

При $n \in (2^{\nu}, 2^{\nu+1})$ имеем $|\Delta d_n| = \nu^{-\alpha} 2^{-\nu}$. Тогда

$$\sum_{n=2^{\nu}}^{2^{\nu+1}-1} |\Delta d_n| = \sum_{n=2^{\nu}}^{2^{\nu+1}-2} |\Delta d_n| + |\Delta d_{2^{\nu+1}-1}| \asymp (2^{\nu} - 1)\nu^{-\alpha} 2^{-\nu} + \nu^{-\alpha-1} \asymp \nu^{-\alpha}.$$

Из определения $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ получаем, что $d_n \asymp \nu^{-\alpha}$. А из последних двух оценок следует, что $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} \in GM$.

С другой стороны,

$$\nu^{-\alpha+1} \leq \sum_{n=\nu}^{2\nu} n^{-\alpha} \leq \sum_{n=\nu}^{\infty} n^{-\alpha} \leq \int_{\nu}^{\infty} t^{-\alpha}\, dt = \nu^{-\alpha+1}.$$

А значит, справедлива оценка

$$\nu^{-\alpha+1} \asymp \sum_{n=\nu}^{\infty} n^{-\alpha} \asymp \sum_{n=\nu}^{\infty} \sum_{j=2^n}^{2^{n+1}-1} |\Delta d_j| = \sum_{n=2^\nu}^{\infty} |\Delta d_\nu|.$$

Из оценки $d_n \asymp \nu^{-\alpha}$ получаем $2^{-\nu-1} \sum_{n=2^{\nu-1}}^{2^\nu-1} |d_n| \asymp \nu^{-\alpha}$. Так как $\nu^{-\alpha+1} \not\leq C\nu^{-\alpha}$, получаем, что последовательность $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ не входит в класс MRBVS.

Лемма доказана.

Замечание. *Из лемм 1 и 2 следует, что классы последовательностей GM и* MRBVS *не совпадают и каждый из классов не лежит в другом, поэтому имеет смысл рассматривать оба класса.*

Теорема 1. *Пусть $f \in C^*[0,1)$, $r \geq 1$. Тогда*

$$\|R_n(f,r)\|_{\infty} = O\left(\sum_{k=1}^{n} a_{nk} E_k^r(f)_{\infty}\right)^{1/r}.$$

Теорема 2. *Если $f \in H_p^{\omega}$, $\infty \geq p \geq r \geq 1$, и $\omega(t)/\mu(t)$ возрастает на $[0,1)$, то $\exists \alpha \in [0,1)$ и*

$$\|R_n(f,r)\|_{p,\mu} \leq C\left(\sum_{k=1}^{n} a_{nk} \omega^r(k^{-1})\right)^{(1-\alpha)/r}.$$

Теорема 1 является аналогом теоремы из [2] для тригонометрических рядов.

В работе [3] мною совместно с С.С. Волосивцом были получены оценки величин $R_n(f,r)(x)$, для которых строки матрицы A принадлежат классу GM. В силу замечания 1 теоремы 1, 2 дополняют результаты, полученные в [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00097-а) и гранта Президента РФ (проект НШ-4383.2010.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М.: Наука, 1987.

2. *Szal B.* On the degree of strong approximation of continuous functions by special matrix // J. Inequal. Pure Appl. Math. 2009. Vol. 10(4), № 111.

3. *Иофина Т.В., Волосивец С.С.* Сильная аппроксимация функций в гельдеровых метриках // Современные проблемы теории функций и их применения: материалы 15-й Сарат. зимней шк., посвящ. 125-летию со дня рождения В.В. Голубева и 100-летию СГУ. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. С. 80–81.

УДК 519.852.2

М.Ю. Калмыков

ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧИ КОНИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Рассматривается задача конического программирования, связанная с конусом функций, производные некоторых порядков которых имеют фиксированный знак на [0,1], и доказывается соответствующая теорема двойственности.

Пусть $A \in R^{m\times n}$, $b \in R^m$, $c \in R^n$, $m < n$, $m, n \in N$. Пусть $0 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leqslant 1$. Для $g \in C[0,1]$ обозначим $Ig = (g(x_1), \ldots, g(x_n))$. Пусть $k \geqslant 0$, $\sigma = (\sigma_i)_{i=0}^k$, $\sigma_i \in \{-1, 0, 1\}$. Пусть $\Delta^p[0,1]$ – множество p-монотонных на $[0,1]$ функций. Напомним, что функция называется *p-монотонной на* $C[0,1]$, если разделенная разность порядка p по любой системе $p+1$ точек из [0,1] является неотрицательной. Следуя [1], рассмотрим конус $\Delta^{0,k}[0,1] := \{f \in C[0,1] : \sigma_p f \in \Delta^p[0,1], \quad 0 \leqslant p \leqslant k\}$. Обозначим $V_{0,k}(\sigma) := \{If \in R^n : f \in \Delta^{0,k}(\sigma)\}$. Двойственный конус имеет вид $V^*_{0,k}(\sigma) := \{y \in R^m : u^T y \geqslant 0, \forall u \in V_{0,k}(\sigma)\}$.

Рассмотрим задачу

$$f(x) := c^T x \to \min_{x \in M}, \quad M := \{x \in R^n : Ax^T = b, \quad x \in V^*_{0,k}(\sigma)\}. \qquad (1)$$

Тогда, согласно [2], двойственная задача будет иметь вид

$$f^*(y) := b^T y \to \max_{y \in M^*}, \quad M^* := \{y \in R^m : A^T y + s = c, \quad s \in V_{0,k}(\sigma)\}. \qquad (2)$$

Обозначим $\|A\|_\infty := \max_i \sum_j \mid a_{ij} \mid$.