БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Muñoz-Delgado F.J., Ramírez-González V., Cárdenas-Morales"D.* Qualitative Korovkin-type results on conservative approximation // J. Approx. Theory. 1998. Vol. 94. P. 144-159.

2. *Shapiro A.* On duality theory of conic linear problems / M. A. Goberna, M. A. Lŕopez, eds.: Semi-Infinite Programming: Recent Advances. Kluwer Academic Publishers, 2002.

УДК 517.984

В.В. Корнев

О РЕЗОЛЬВЕНТЕ ОПЕРАТОРА ИНТЕГРИРОВАНИЯ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Рассмотрим оператор

$$Af = \int\limits_0^{\theta(x)} f(t)\,dt, \quad 0 \le x \le 1,$$

где $\theta(x)$ — инволюция (т.е. $\theta(\theta(x)) \equiv x$), удовлетворяющая условиям: $\theta(x)$ непрерывна, $\theta(0) = 1$, $\theta(1) = 0$, $\theta(x) \in C^3(0,1)$ и в некоторой δ-окрестности нуля $\theta'(x) = -x^\alpha r(x)$, $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to 0} r(x) > 0$.

В случае $r(x) \equiv 1$ в работе [1] была доказана равносходимость разложений суммируемых функций по собственным функциям оператора A и тригонометрических рядов Фурье. Важным этапом в доказательстве этого факта является исследование поведения резольвенты Фредгольма

$$y(x) = (E - \lambda A)^{-1} Af$$

(E — единичный оператор, λ — комплексный параметр) в окрестности точек $x = 0$ и $x = 1$, так как в этих точках дифференциальные уравнения резольвенты имеют особенность. В частности, было показано, что в окрестности нуля

$$y(\delta t) = (c_1 + g_1(t))x_{11}(t) + (c_2 + g_2(t))x_{12}(t),$$

где c_1, c_2 — константы, не зависящие от t, $g_1(t)$ — линейная комбинация первообразных для функций $x_{22}(t)f(\theta(\delta t))\theta'(\delta t)$ и $x_{12}(t)f(\delta t)$, $g_2(t)$ — линейная комбинация первообразных для функций $x_{21}(t)f(\theta(\delta t))\theta'(\delta t)$ и $x_{11}(t)f(\delta t)$. Функции $x_{ij}(t)$, $i,j = 1,2$, образуют фундаментальную систему решений дифференциальных уравнений, определяющих резольвенту, и для них в [1] были получены асимптотические формулы (см. лемму 7).

В рассматриваемом нами случае наличие множителя $r(x)$ в формуле для $\theta'(x)$ существенно усложняет вывод асимптотических формул для функций $x_{ij}(t)$. Возникшие трудности удалось преодолеть с помощью метода эталонных уравнений [2]. В итоге был получен следующий результат.

Теорема. *При $\lambda \to \infty$ справедливы формулы*

$$x_{1j}(t) = O(\lambda^{\nu-1}), \quad x_{2j}(t) = O(\lambda^{-\nu}) \quad \text{при} \quad |\lambda\omega^q(t)| \le 1, \quad j = 1, 2;$$
$$x_{1j}(t) = (-1)^j A(t,\lambda) \exp\left(-(-1)^j i\mu\omega^q(t)\right)[1],$$
$$x_{2j}(t) = B(t,\lambda) \exp\left(-(-1)^j i\mu\omega^q(t)\right)[1] \quad \text{при} \quad |\lambda\omega^q(t)| \ge 1, \quad j = 1, 2,$$

где

$$q = \frac{1}{2}(\alpha+2), \nu = (2q)^{-1},\ \mu = -q^{-1}\delta^q\lambda,\ \omega(t) = \left(\frac{2}{2+\alpha}\int\limits_0^t \sqrt{\tau^\alpha r(\delta\tau)}\,d\tau\right)^{\frac{2}{2+\alpha}},$$

$$A(t,\lambda) = \delta^{\frac{\alpha-2}{4}} q^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} \omega^{\frac{q-1}{2}}(t),\ B(t,\lambda) = -i\delta^{\frac{-\alpha-2}{4}} q^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} \omega^{\frac{1-q}{2}}(t),$$
$$[1] = 1 + O\left(|\lambda\omega^q(t)|^{-1}\right).$$

Метод эталонных уравнений позволяет получить соответствующие асимптотические формулы и в окрестности второй особой точки $x = 1$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-*4383.2010.1*) и РФФИ (проект* 10-01-00270*).*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Корнев В.В., Хромов А.П.* Оператор интегрирования с инволюцией, имеющей степенную особенность // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2008. Т. 8. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 4. С. 18–33.

2. *Дородницын А.А.* Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка // УМН. 1952. Т. VII, вып. 6(52). С. 1–96.