

Интенсивности скачков  $\xi = \frac{p_\infty}{p_1} < 1$ ,  $\xi' = \frac{p_Q}{p_1} > 1$  находим из соотношений на косых скачках, углы  $\omega$  и  $\omega'$  — из геометрических построений [1].

В таблице приведены значения параметров течения (углы, интенсивности и др.) для двухатомного газа ( $\gamma = 7/5$ ). Зависимости  $\omega'(\omega)$  и  $\omega(\xi)$  достаточно близки к экспериментальным [3, рис. 8.6; 4, фиг. 15 на с. 461; 5] в диапазоне числа Маха  $M_\infty \in [1, 3]$ .

В околосвуковом случае для слабых скачков ( $M_\infty \rightarrow 1$ ) формулы упрощаются и непрерывно переходят в формулы околосвуковой теории [6]:  $k(u) = u$ ,  $L(u) = u^2/2$ ,  $u_Q = -u_1/7$ ,  $v_Q = 0$ ,  $\frac{\pi}{2} - \omega' = 0.5687 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) \geq 0$ .

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Севостьянов Г.Д. Метод расчета параметров регулярного отражения косоугольного скачка от стенки // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 140–143.
2. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. II. 4-е изд. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963.
3. Баженова Т.В., Гвоздева Л.Г. Нестационарные взаимодействия ударных волн. М.: Наука, 1977.
4. Основы газовой динамики / под ред. Г. Эммонса. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
5. Баженова Т.В., Гвоздева Л.Г., Лагутов Ю.П. и др. Нестационарные взаимодействия ударных и детонационных волн в газах. М.: Наука, 1986.
6. Севостьянов Г.Д. Регулярное отражение околосвукового скачка от стенки // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 181–184.

УДК 532.5:533.6.011.5

**В.С. Кожанов**

### О ТРАЕКТОРИЯХ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ НА СТАДИИ ОТРАЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О СХОДЯЩЕЙСЯ УДАРНОЙ ВОЛНЕ

Изучение задачи о сходящейся ударной волне (УВ) предполагает определение течения как на стадии схождения, так и на стадии отражения. На второй стадии структура течения в области перед отраженной УВ обуславливается выбором значения показателя адиабаты  $\gamma$ . В статье разбираются два возможных варианта движения частиц в указанной области, соответствующие двум промежуткам:  $1 < \gamma \leq \gamma_s$  и  $\gamma_s < \gamma$ . Значение  $\gamma_s$  зависит от типа симметрии течения и начального распределения плотности невозмущенной среды.

В окрестности центра фокусировки течение принимает автомодельный характер, и решение может быть построено в форме

$$u = -knr^{1-1/n}F(\eta), \quad c^2 = k^2n^2r^{2-2/n}G(\eta), \quad \rho = ar^\omega\mathcal{R}(\eta), \quad k, a = \text{const},$$

где  $n$  – показатель автомодельности; координата  $r$  – независимая размерная переменная;  $F(\eta)$ ,  $G(\eta)$ ,  $\mathcal{R}(\eta)$  – автомодельные представители скорости частиц  $u$ , квадрата скорости звука  $c^2$  и плотности  $\rho$  соответственно;  $\eta = kt/r^{1/n}$  – независимая автомодельная переменная ( $t$  – время);  $\omega$  – показатель в степенном законе распределения начальной плотности.

Рассмотрим картину течения на  $(r,t)$ -плоскости (рис. 1). Сплошными толстыми линиями изображены траектории сходящейся (УВ<sub>1</sub>) и отраженной (УВ<sub>2</sub>) УВ. Это кривые постоянства переменной  $\eta$  – обобщенные параболы вида  $t = \eta_{sw}r^{1/n}/k$ ,  $\eta_{sw} = \text{const}$ . Для сходящейся УВ  $\eta_{sw} = -1$  (традиционная нормировка), для отраженной УВ  $\eta_{sw} = \eta_{sw2} \leq 0$ . Кривые УВ<sub>1</sub>, УВ<sub>2</sub> и линия  $t = 0$  делят  $(r,t)$ -плоскость на четыре области: область I соответствует невозмущенной среде, область II – течению за сходящейся УВ, области III и IV – течениям перед и за отраженной УВ. Сплошными тонкими линиями показаны траектории движения частиц.

Возьмем одну частицу на расстоянии  $r = r_p$  от центра симметрии и проследим ее траекторию для двух значений  $\gamma$ :  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ ,  $\gamma_1 < \gamma_s < \gamma_2$ . В первом случае (рис. 1, *a*) в момент начала движения сходящейся УВ частица покоится и продолжает пребывать в таком состоянии до момента  $t = t_1$ . При  $t = t_1$  УВ<sub>1</sub> приходит в точку  $r = r_p$  и разгоняет частицу, заставляя ее двигаться к центру с уменьшением скорости. В момент  $t = 0$  происходит фокусировка сходящейся УВ и возникает отраженная УВ, которая распространяется от центра симметрии. В момент  $t = t_2$  УВ<sub>2</sub> встречается с частицей и меняет направление ее движения на противоположное. При  $t > t_2$  частица удаляется от центра, теряя скорость. Таким образом, при  $\gamma = \gamma_1$  все частицы в области III движутся к центру симметрии.

При  $\gamma = \gamma_2$  (рис. 1, *b*) траектория частицы в областях I и II аналогична первому случаю. В области III при  $t > 0$  частица сначала по-прежнему приближается к центру. Но при  $t = t^*$  ( $t^* < t_2$ ) ее скорость падает до нуля, она «разворачивается», а затем (при  $t > t^*$ ) движется от центра с увеличением скорости. В момент  $t = t_2$  частицу догоняет отраженная УВ. При  $t > t_2$  частица удаляется от центра с уменьшением скорости.

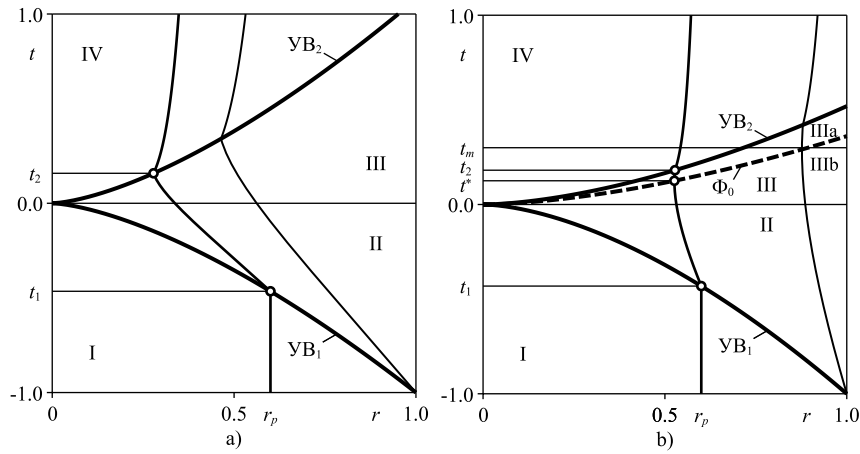


Рис. 1

Во втором случае в области III скорость частицы, находящейся в момент времени  $t = t^*$  на некотором расстоянии от центра, равна нулю. Это означает, что в пространстве существует поверхность с нулевой скоростью частиц  $\Phi_0$ . Поверхность  $\Phi_0$  возникает в момент  $t = 0$  вместе с отраженной УВ и расширяется по закону  $t = \eta_0 r^{1/n} / k$ ,  $\eta_0 < \eta_{sw2}$ . На  $(r, t)$ -плоскости траектория поверхности  $\Phi_0$  изображена пунктирной линией. Кривая  $\Phi_0$  делит область III на две подобласти. В подобласти III<sub>а</sub>, соответствующей течению между отраженной УВ и поверхностью  $\Phi_0$ , частицы движутся от центра, а в подобласти III<sub>б</sub>, отвечающей течению перед поверхностью  $\Phi_0$ , — к центру. Таким образом, при  $\gamma = \gamma_2$  в области III движение частиц двунаправлено. Схема течения для второго случая в некоторый фиксированный момент времени  $t_m > t_2$  показана на рис. 2.

Движение частиц, наблюдаемое при  $\gamma = \gamma_1$ , характерно для значений  $1 < \gamma \leq \gamma_s$ , а наблюдаемое при  $\gamma = \gamma_2$ , — для значений  $\gamma_s < \gamma$ .

Так как  $\eta_0 < \eta_{sw2}$ , то скорость поверхности  $\Phi_0$  выше скорости отраженной УВ. Это значит, что область III<sub>а</sub>, в которой частицы удаляются от центра, с течением времени расширяется.

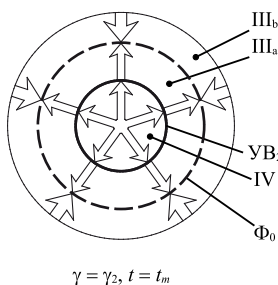


Рис. 2

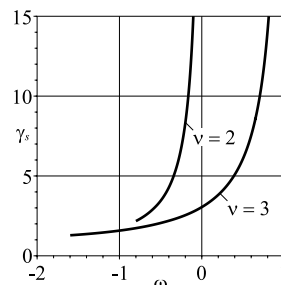


Рис. 3

Если  $\gamma = \gamma_s$ , реализуется граничный режим, когда отраженная УВ и поверхность с нулевой скоростью частиц совпадают, при этом  $\eta_0 = \eta_{sw2}$ . График зависимости значения  $\gamma_s$  от показателя  $\omega$  для цилиндрической

( $\nu = 2$ ) и сферической ( $\nu = 3$ ) симметрий течения представлен на рис. 3. Если плотность невозмущенной среды постоянна ( $\omega = 0$ ), то  $\gamma_s = 73.1395$  для  $\nu = 2$  и  $\gamma_s = 3.05361$  для  $\nu = 3$ . В связи с этим можно отметить, что в сферическом случае при  $\omega = 0$  экстраполяция результатов работы [1] дает значение  $\gamma_s$ , близкое к трем.

Целью статьи было указать на два возможных варианта развития течения в области перед отраженной УВ. Формальное решение задачи о сходящейся УВ может быть построено для любых наборов значений параметров  $\nu$ ,  $\omega$ ,  $\gamma$  [2]. Однако физическая сторона процесса, наблюдаемого в области III для значений  $\gamma_s = \gamma_s(\nu, \omega) < \gamma$ , не ясна и требует дополнительного исследования.

*Автор благодарит И.А. Чернова за внимание к работе.*

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Валиев Х.Ф.* Отражение ударной волны от центра или оси симметрии при показателях адиабаты от 1.2 до 3 // ПММ. 2009. Вып. 73, №3. С. 397–407.
2. *Lazarus R.B.* Self-similar solutions for converging shocks and collapsing cavities // SIAM J. Numer. Anal. 1981. Vol. 18, is. 2. P. 316–371.

УДК 539.3

**В.И. Копнина, М.В. Овчинникова**

### **ИЗГИБ ИЗОТРОПНОЙ ПЛИТЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ КВАДРАТНЫМ ОТВЕРСТИЕМ**

Пусть имеется изотропная прямоугольная плита, ослабленная квадратным отверстием (со стороной  $a$ ). Центр отверстия совпадает с началом системы координат, которая выбирается следующим образом: плоскость  $XOY$  совпадает со срединной плоскостью плиты, а ось  $OZ$  направлена вертикально вниз (рисунок). Пластинка находится под действием изгибающих моментов интенсивности  $M_1$  на сторонах, параллельных оси  $OY$ , и интенсивности  $M_2$  на сторонах, параллельных оси  $OX$ . Будем считать, что контур отверстия или жестко заделан, или свободен от действия изгибающих нагрузок.

Задача состоит в определении НДС такой плиты. Сделаем два предположения:

- 1) размеры отверстия малы по сравнению с размерами самой плиты;
- 2) отверстие находится достаточно далеко от краёв плиты (порядка двух-трех диаметров).