и имеет вид

$$\phi(\omega t) = C_1 \cos\omega t + (C_2 - 1)\cos\omega t. \qquad (10)$$

Константы C_1 и C_2 определяются из условия непрерывности нормальных составляющих тензоров напряжений упругой и вязкоупругой сред:

$$(\lambda_1 + 2\mu_1)(u_{por,x} + u_{o,x}) = -\frac{\rho}{k^2} u_{pr,tt}(x=0). \qquad (11)$$

Введя в рассмотрение акустические жесткости $z_1 = \rho_1\nu_1$, $z = \rho w$, учитывая, что $u_{por,x} = \frac{-1}{\nu_1} u_{por,t}$, $u_{o,x} = \frac{1}{\nu_1} u_{o,t}$, и разрешая систему уравнений (9) и (11), получим выражения для констант C_1 и C_2:

$$C_1 = \frac{nz}{\omega(z+z_1)} C_2, C_2 = \frac{2z_1}{(z+z_1) - \frac{n^2z^2}{\omega^2(z+z_1)}}. \qquad (12)$$

Так как $\cos\alpha = -\sin(\alpha - \pi/2)$, то отраженная волна в окрестности границы отражения–преломления приобретает вид

$$u_o = e^{-nt}((C_2 - 1)\sin\omega t - C_1 \sin(\omega t - \pi/2))(C_1 > 0), \qquad (13)$$

т.е. она состоит из двух волн: первой — основной и второй — запаздывающей по фазе на $\pi/2$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Фрейденталь А., Гейрингер Х.* Математические теории неупругой сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 432 с.

УДК 533.6.011:532.529

Н.О. Евсеев, Е.А. Лунёв, Г.Д. Севостьянов

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ПРИ РЕГУЛЯРНОМ ОТРАЖЕНИИ КОСОГО СКАЧКА ОТ СТЕНКИ

Приведены таблицы теоретических значений параметров течения газа при регулярном отражении косого скачка от плоской стенки в виде косого скачка (режим Крокко обеспечивает единственность решения, устойчивость угла отражения при небольшом искривлении отраженного скачка, отсутствие отрыва потока в точке отражения). Сравнение вычисленных параметров с экспериментальными удовлетворительно.

Следуя работе [1], проведен расчет параметров течения газа при регулярном отражении косого скачка от плоской стенки (оси x).

Пусть косой скачок AO в однородном сверхзвуковом потоке (с числом Маха $M_\infty > 1$) под неизвестным углом падения ω отражается регулярно в точке O от плоской стенки в виде косого скачка OB (угол отражения ω' неизвестен). Величины до AO отметим знаком "∞", между AO и OB — знаком "1", за OB — знаком "Q". Обозначим через θ, p, τ, M угол наклона вектора скорости $\mathbf{v}$ к оси x, давление, переменную Чаплыгина, число Маха соответственно.

Уравнения Чаплыгина [2, §16 – 17] для плоского безвихревого установившегося течения идеального совершенного газа

$$\varphi_\theta = -\psi_\sigma, \quad \varphi_\sigma = K(\sigma)\psi_\theta, \tag{1}$$

где φ — потенциал скорости, ψ — функция тока; K, σ — функции Чаплыгина, с помощью функций

$$\begin{aligned} &u = -c\sigma, && v = c\theta, \quad k(u) = -K(\sigma), \\ &c = (\gamma+1)\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{3/(\gamma-1)}, && k(0) = 0, \;\; k'(0) = 1 \end{aligned} \tag{2}$$

($\gamma > 1$ — отношение теплоемкостей для газа) приведены к нелинейной системе в дивергентной форме [1]:

$$(L(u))_\varphi = v_\psi, \;\; v_\varphi = u_\psi, \;\; k(u) = L'(u). \tag{3}$$

Тогда уравнение ударной поляры для скачка

$$[v]^2 = [L][u], \tag{4}$$

где $[f] = f_+ - f_-$ – разрыв функциии f на скачке.

В (3) функции u и L имеют вид интегралов по $\tau = V^2 V_m^{-2} < 1$:

$$\begin{aligned} &u = c\int_{\tau_*}^{\tau} \frac{(1-\tau)^\beta}{2\tau} d\tau. \quad L = c\int_{\tau_*}^{\tau} \frac{-1+(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{(\beta+1)}} d\tau \geq 0, \\ &\tau_* = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} > 0,\; 0 < \tau < 1,\; \beta = \frac{1}{\gamma-1} > 0,\; k = \frac{dL}{d\tau} / \frac{du}{d\tau} = -K. \end{aligned} \tag{5}$$

Если скачок уплотнения в однородном потоке криволинейный, то ударная поляра на плоскости vu будет "ежевидной" полярой, введенной Л. Крокко (L. Crocco) в 1937 г. ("иголки" на ней – образы линий тока в неоднородном потоке за скачком; их наклоны характеризуют кривизны линий тока на скачке). На плоской стенке ($dv = 0$) кривизна линии тока без отрыва потока в точке O равна нулю, тогда имеем точку Крокко Q на ударной поляре и условие на OB :

$$\frac{[L]}{[u]} + 3k_+ = 0, \quad u = u_Q < 0, \quad v = v_Q = 0. \tag{6}$$

Малая поляра вершиной лежит на большой и пересекает ее ось в своей точке Q.

Так как $\theta_\infty = \theta_Q = 0$, то из (4) на AO и OB имеем

$$v_1^2 = ([L][u])_{AO} = ([L][u])_{OB}. \qquad (7)$$

Из (6) и (7) численно находятся τ_1 и τ_Q.

Значения параметров течения для $\gamma = 7/5$.

M_∞	M_1	τ_∞	τ_1	τ_Q	$\lvert\theta_1^\circ\rvert$	ω°	ω'°	ξ	ξ'
1,01	1,005	0,169	0,168	0,166	0,0	83,1	86,0	0,996	1,007
1,02	1,012	0,172	0,170	0,166	0,1	79,8	84,2	0,991	1,014
1,05	1,03	0,180	0,175	0,165	0,3	74,2	80,8	0,976	1,041
1,09	1,053	0,191	0,181	0,164	0,5	69,2	77,6	0,957	1,074
1,15	1,088	0,209	0,191	0,162	1,3	64,0	74,0	0,927	1,125
1,2	1,116	0,223	0,199	0,161	1,9	60,6	71,5	0,901	1,168
1,3	1,170	0,252	0,215	0,158	3,3	55,7	67,3	0,849	1,256
1,4	1,222	0,281	0,230	0,155	4,9	52,1	63,8	0,797	1,347
1,5	1,272	0,310	0,244	0,152	6,6	49,3	60,7	0,745	1,440
1,6	1,320	0,338	0,258	0,149	8,3	47,1	57,9	0,696	1,534
1,7	1,365	0,366	0,271	0,145	10,0	45,4	55,3	0,648	1,630
1,8	1,408	0,393	0,284	0,142	11,8	44,0	53,0	0,603	1,727
1,9	1,450	0,419	0,295	0,138	13,6	42,9	50,7	0,561	1,826
2,0	1,490	0,444	0,307	0,134	15,4	41,9	48,6	0,522	1,925
2,1	1,527	0,468	0,318	0,131	17,2	41,2	46,6	0,485	2,025
2,2	1,564	0,491	0,328	0,127	19,0	40,5	44,7	0,451	2,125
2,3	1,598	0,514	0,338	0,123	20,8	40,0	42,8	0,419	2,226
2,4	1,632	0,535	0,347	0,120	22,6	39,6	41,0	0,390	2,328
2,5	1,664	0,555	0,356	0,116	24,4	39,3	39,3	0,363	2,430
2,6	1,695	0,574	0,364	0,113	26,2	39,0	37,6	0,338	2,523
2,7	1,724	0,593	0,372	0,109	28,1	38,9	36,0	0,315	2,636
2,8	1,753	0,611	0,381	0,106	29,9	38,7	34,3	0,293	2,739
2,9	1,781	0,627	0,388	0,102	31,7	38,7	32,7	0,273	2,843
3,0	1,809	0,642	0,395	0,098	33,5	38,7	31,1	0,255	2,947

Если $\gamma = 1 + \dfrac{2}{m}$ (m — число степеней свободы молекулы газа без учета ее колебаний), то интегралы в (5) вычисляются аналитически.

Из интеграла Бернулли

$$(\gamma - 1)M^2 = \frac{2\tau}{1-\tau}. \qquad (8)$$

Интенсивности скачков $\xi = \dfrac{p_\infty}{p_1} < 1$, $\xi' = \dfrac{p_Q}{p_1} > 1$ находим из соотношений на косых скачках, углы ω и ω' — из геометрических построений [1].

В таблице приведены значения параметров течения (углы, интенсивности и др.) для двухатомного газа ($\gamma = 7/5$). Зависимости $\omega'(\omega)$ и $\omega(\xi)$ достаточно близки к экспериментальным [3, рис. 8.6; 4, фиг. 15 на с. 461; 5] в диапазоне числа Маха $M_\infty \in [1, 3]$.

В околозвуковом случае для слабых скачков ($M_\infty \to 1$) формулы упрощаются и непрерывно переходят в формулы околозвуковой теории [6]: $k(u) = u$, $L(u) = u^2/2$, $u_Q = -u_1/7$, $v_Q = 0$, $\dfrac{\pi}{2} - \omega' = 0.5687 \cdot \left(\dfrac{\pi}{2} - \omega\right) \geq 0$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Севостьянов Г.Д.* Метод расчета параметров регулярного отражения косого скачка от стенки // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 140–143.
2. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. II. 4-е изд. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963.
3. *Баженова Т.В., Гвоздева Л.Г.* Нестационарные взаимодействия ударных волн. М.: Наука, 1977.
4. Основы газовой динамики / под ред. Г. Эммонса. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
5. *Баженова Т.В., Гвоздева Л.Г., Лагутов Ю.П. и др.* Нестационарные взаимодействия ударных и детонационных волн в газах. М.: Наука, 1986.
6. *Севостьянов Г.Д.* Регулярное отражение околозвукового скачка от стенки // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 181–184.

УДК 532.5:533.6.011.5

В.С. Кожанов

О ТРАЕКТОРИЯХ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ НА СТАДИИ ОТРАЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О СХОДЯЩЕЙСЯ УДАРНОЙ ВОЛНЕ

Изучение задачи о сходящейся ударной волне (УВ) предполагает определение течения как на стадии схождения, так и на стадии отражения. На второй стадии структура течения в области перед отраженной УВ обусловливается выбором значения показателя адиабаты γ. В статье разбираются два возможных варианта движения частиц в указанной области, соответствующие двум промежуткам: $1 < \gamma \leq \gamma_s$ и $\gamma_s < \gamma$. Значение γ_s зависит от типа симметрии течения и начального распределения плотности невозмущенной среды.