

Здесь $\Phi(\gamma)$ – определенная функция.

С использованием выражения (9) получены результаты для пластин, изготовленных из пьезокерамики марки ЦТС-19 с механической добротностью $Q = 90$. Расчеты проводились для $h = 6 \cdot 10^{-4}$ м при угловой скорости $\Omega_3 = 10$ рад/с. Наблюдалось возрастание амплитуды тока для значений β , близких к первой собственной частоте λ_1 свободных колебаний пластины без внутреннего трения.

В таблице представлены значения собственной частоты и нормированной безразмерной амплитуды тока при различных величинах присоединенной массы.

$M, \text{кг}$	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$
λ_1	0,5077	0,4876	0,4698
$j_\omega \cdot 10^6$	1,20	1,44	1,68

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Нагар Ю.Н., Ольшанский В.Ю., Панкратов В.М., Серебряков А.В. Об одной модели пьезогироскопа // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 2. С. 71–74.

2. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т.5. Электроупругость. Киев: Наук. думка, 1989. 280 с.

УДК 539.3

В.Ю.Ольшанский, Ю.Н.Нагар

ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА В ОДНООСЕВОМ ПЬЕЗОГИРОСКОПЕ

Рассматривается модель устройства [1] для измерения угловых скоростей вращения подвижного объекта, состоящего из двух тонких взаимно перпендикулярных пьезокерамических пластин Π_1, Π_2 и груза массы M . У каждой из пластин одно из оснований закреплено, а другое постоянно контактирует с грузом, воспринимая лишь нормальное механическое усилие.

К пластине Π_1 прикреплены электроды, с помощью которых подается электрический сигнал. Пьезоматериал, из которого изготовлены пластины, предварительно поляризован в направлении вдоль их толщин. Порождаемые в пьезопластинке за счет продольного пьезоэффекта плоские упругие деформационные волны приводят в движение груз.

При вращении подвижной системы отсчета относительно инерциальной системы на груз действует кориолисова сила

$\mathbf{F}_c = -2M(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}_r)$. Вследствие этого угловая скорость $\mathbf{\Omega}$ подвижной системы отсчета влияет на амплитуду и другие характеристики колебаний. Так как период колебаний пластин весьма мал и за один период угловая скорость изменяется незначительно, возможно рассматривать установившиеся колебания при $\Omega_3 = \text{const}$.

Обозначим $u_i(x_i, t)$ – перемещение плоского слоя с координатой x_i в пластине Π_1 . Воспользуемся волновым уравнением, описывающим распространение волны в длинной линии с затуханием без искажений [2]. Дополним его начальными условиями, а также граничными условиями, учитывающими уравнение обратного пьезоэффекта. Переходя к безразмерным величинам, получим следующую краевую задачу для определения перемещений в пластинах:

$$(u_i)''_{tt} + 2\alpha h(u_i)'_t + \alpha^2 h^2 u_i = (u_i)''_{x_i x_i}, i = 1, 2, \quad (1)$$

$$u_i(x_i, 0) = 0, (u_i)'_t \Big|_{t=0} = 0, i = 1, 2, \quad (2)$$

$$u_i(0, t) = 0, i = 1, 2, \quad (3)$$

$$\left((u_i)'_{x_i} + m(u_i)''_{tt} \right) \Big|_{x_i=\delta_i} = h_i(t) + m(-1)^j \omega (u_j)'_t \Big|_{x_j=\delta_j}, j = 3 - i, i = 1, 2. \quad (4)$$

Здесь α – коэффициент затухания, учитывающий рассеивание энергии на тепловые потери, c^E – скорость звука в пьезокерамической пластине при $E = \text{const}$, d_{33} – пьезомодуль при продольном пьезоэффекте, s_{33}^E – упругие податливости по осям $i = 1, 2$ при $E = \text{const}$, $h_1(t) = d_{33}E_1(t)$, $h_2(t) = 0$, $E_1(t)$ – напряженность электрического поля в первой пластине. В формулах (4) обозначено $m = Ms_{33}^E(c^E)^2/(Ah)$, $\omega = 2\Omega_3 h/c^E$, h – характерный линейный размер.

Представим решение в виде разложения $u_i(x_i, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{in}(x_i, t) \cdot \omega^n$, $i = 1, 2$, по малому параметру $\omega \ll 1$. Получим для функций $u_{i0}(x_i, t)$ и $u_{i1}(x_i, t)$ краевые задачи, включающие уравнения (1), условия (2), (3), а также граничные условия соответственно

$$\left((u_{i0})'_{x_i} + m(u_{i0})''_{tt} \right) \Big|_{x_i=\delta_i} = h_i(t),$$

$$\left((u_{i1})'_{x_i} + m(u_{i1})''_{tt} \right) \Big|_{x_i=\delta_i} = (-1)^j m (u_{j0})''_{tt} \Big|_{x_j=\delta_j}, j = 3 - i, i = 1, 2.$$

Ранее (см. [1]) был рассмотрен случай $\alpha = 0$ и рассчитаны собственные частоты пластин, используемые затем в случае учета внутреннего трения в пластинах. Поскольку найденные резонансные частоты велики

(> 2 МГц), возбуждение колебаний в пластине Π_1 с частотой, близкой к резонансной, может приводить к ее нагреву. Для уменьшения этого нежелательного эффекта, можно производить возбуждение колебаний лишь в течение периода времени, достаточного для их установления. В связи с этим представляет интерес изучение переходного процесса и возникает необходимость рассчитать время выхода на установившиеся колебания.

Рассмотрим задачу с учетом диссипации. Пусть $\delta_1 = \delta_2 = h$. Применив к названным краевым задачам преобразование Лапласа по переменной t , имеем для изображений перемещений \tilde{u}_{in} ОДУ второго порядка с граничными условиями. Получив решение этих уравнений, затем восстанавливаем их оригиналы при $x_i = 1$ с использованием теоремы умножения и второй теоремы разложения [3] и полагая $h_1(t) = U_0 \sin \beta t$:

$$u_{10}(1, t) = 2U_0 \operatorname{Re} \sum_{p_n: \operatorname{Im} p_n > 0} \frac{\beta(e^{p_n t} - \cos \beta t) - p_n \sin \beta t}{(\beta^2 + p_n^2) f'(p_n)};$$

$$u_{21}(1, t) = -mU_0 \beta \sum_{p_n} \frac{1}{f'^2(p_n)} \left(\frac{f''(p_n)}{f'(p_n)} \cdot \frac{p_n(\cos \beta t - e^{p_n t}) - \beta \sin \beta t}{\beta^2 + p_n^2} + \right. \\ \left. + \frac{p_n t e^{p_n t}}{\beta^2 + p_n^2} + \frac{(p_n^2 - \beta^2)(\cos \beta t - 2\beta p_n \sin \beta t)}{(\beta^2 + p_n^2)^2} \right). \quad (5)$$

В равенствах (5) обозначено $f(p) = \gamma \operatorname{cth} \gamma + mp^2$, $p_n = \gamma_n - \alpha h$ – простые полюсы функции $\phi(p) = 1/f(p)$. Для действительной и мнимой частей γ_n была получена оценка

$$x_n = 2\beta/(m\pi^2 n^2), y_n = \pi n + 1/(m\pi n) \quad (n \gg 1),$$

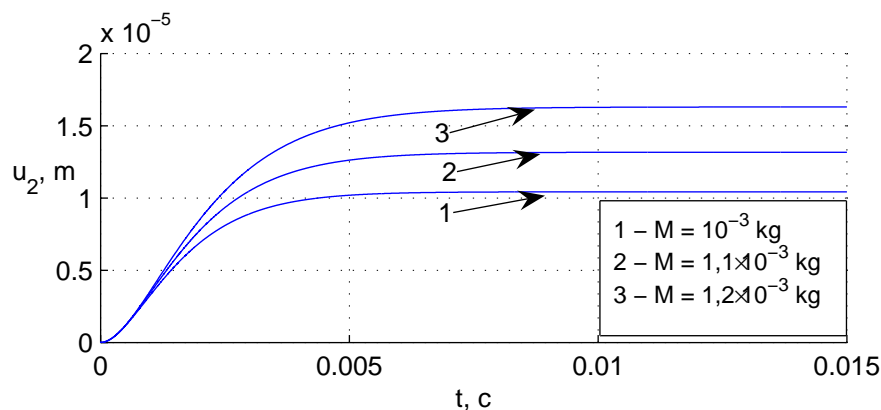
которая использовалась при итерационном уточнении нулей $f(p)$. При малых значениях n γ_n находились методом продолжения по параметру α , где в качестве начальных приближений для y_n брались значения собственных частот пластин, рассчитанные в [1], а для x_n – нулевые значения.

Пренебрегая слагаемыми более высокого порядка малости, размерное перемещение незакрепленной грани пластины Π_2 можно выразить следующим образом:

$$u_2(\delta_2, t) = h\omega u_{21}(1, t). \quad (6)$$

Для переходного процесса были проведены численные расчеты по формулам (5), (6) и построен график зависимости амплитудных

значений перемещения $u_2(\delta_2, t)$. На рисунке представлено сравнение амплитудных значений перемещения в переходном процессе для различных значений массы присоединенного груза, от которой зависит коэффициент α , рассчитанные при частотах внешнего воздействия, близких к резонансным (1 – 2,77998 МГц, 2 – 2,65951 МГц, 3 – 2,55344 МГц).



Определен промежуток времени, за который происходит выход на установившиеся колебания, например, при $M = 10^{-3}$ кг он составил $\Delta t \approx 0,007$ с.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Нагар Ю.Н., Ольшанский В.Ю., Панкратов В.М., Серебряков А.В.* Об одной модели пьезогироскопа // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 2. С. 71–74.
2. *Афонин С.М.* Параметрическая структурная схема пьезопреобразователя // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2002. № 6. С. 101–107.
3. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.

УДК 629

И.А. Панкратов, Я.Г. Сапунков, Ю.Н. Челноков

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИЕЙ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

В настоящей статье исследуется следующая задача оптимального управления ориентацией орбиты космического аппарата (КА): необходимо определить ограниченное по модулю управление \mathbf{u} :

$$-u_{\max} \leq u \leq u_{\max} < \infty, \quad u = |\mathbf{u}|,$$

ортогональное плоскости орбиты КА, переводящее орбиту КА, движение центра масс которого описывается уравнениями