УДК 629

И.А. Панкратов, Ю.Н. Челноков

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В ОТКЛОНЕНИЯХ

Рассматривается задача переориентации орбиты космического аппарата (КА), оптимальная в смысле минимума интегрального квадратичного функционала качества. Для решения задачи используются кватернионные модели ориентации орбиты в отклонениях и принцип максимума.

1. Постановка задачи. Необходимо определить ограниченное по модулю управление $\mathbf{u}$:

$$-u_{\max} \leq u \leq u_{\max} < \infty, \quad u = |\mathbf{u}|, \tag{1}$$

ортогональное плоскости орбиты КА, переводящее орбиту КА, движение центра масс которого описывается уравнениями

$$\begin{aligned} &2d\Delta\boldsymbol{\Lambda}/dt = \Delta\boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{\Omega}_\xi, \;\; \boldsymbol{\Omega}_\xi = ur(\cos\varphi\, \boldsymbol{i}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{i}_2)/c, \\ &d\varphi/dt = c/r^2, \;\; c = \mathrm{const}, \;\; r = p/(1 + e\cos\varphi), \end{aligned} \tag{2}$$

из заданного начального состояния

$$t = 0, \;\; \varphi(0) = \varphi_0, \;\; \Delta\boldsymbol{\Lambda}(0) = \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}^0 \circ \boldsymbol{\Lambda}^* \tag{3}$$

в конечное состояние, принадлежащее многообразию

$$t = t_1, \;\; \varphi(t_1) = \varphi_1, \;\; vect(\Delta\boldsymbol{\Lambda}(t_1)) = 0. \tag{4}$$

При этом необходимо минимизировать функционал

$$\int_0^{t_1} (\alpha_1[\Delta\Lambda_1^2 + \Delta\Lambda_2^2 + \Delta\Lambda_3^2] + \alpha_2 u^2)dt, \quad \alpha_1, \alpha_2 = \mathrm{const} \geq 0. \tag{5}$$

Здесь $\boldsymbol{\Lambda}$ – кватернион ориентации орбиты КА, r – модуль радиуса-вектора $\mathbf{r}$ центра масс КА, c – постоянная площадей, p и e – параметр и эксцентриситет орбиты, φ – истинная аномалия. Переменная $\Delta\boldsymbol{\Lambda}$ характеризует отклонение углового положения орбиты КА от ее требуемого положения, задаваемого кватернионом $\boldsymbol{\Lambda}^*$, $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}^* \circ \Delta\boldsymbol{\Lambda}$ [1]. Верхняя волна – символ сопряжения. Величины c, p, e, φ_0, $\boldsymbol{\Lambda}^0$, $\boldsymbol{\Lambda}^*$ заданы; подлежат определению t_1, φ_1 и оптимальный закон управления $u = u(t)$.

2. Законы оптимального управления. Поставленную задачу будем решать с помощью принципа максимума. Для этого введем дополнительные переменные $\Delta\boldsymbol{M}$ и χ, сопряженные по отношению к фазовым переменным $\Delta\boldsymbol{\Lambda}$ и φ. Функция Гамильтона—Понтрягина имеет вид

$$H = -\sigma + \chi c/r^2 + 0.5ur(\Delta N_1 \cos\varphi + \Delta N_2 \sin\varphi)/c,$$

где ΔN_1, ΔN_3 – компоненты кватерниона $\Delta\boldsymbol{N} = \Delta\tilde{\boldsymbol{\Lambda}} \circ \Delta\boldsymbol{M}$; $\sigma = \alpha_1[\Delta\Lambda_1^2 + \Delta\Lambda_2^2 + \Delta\Lambda_3^2] + \alpha_2 u^2$.

Система уравнений для сопряженных переменных имеет вид

$$\begin{gathered} 2d\Delta\boldsymbol{M}/dt = 4\alpha_1 vect\Delta\boldsymbol{\Lambda} + \Delta\boldsymbol{M} \circ \boldsymbol{\Omega}_\xi, \\ d\chi/dt = 2(\chi/r)dr/dt + ur(\Delta N_1 \sin\varphi - \Delta N_2 \cos\varphi)/c- \\ -0.5ur^2(\Delta N_1 \cos\varphi + \Delta N_2 \sin\varphi)/c^2. \end{gathered} \tag{6}$$

Закон оптимального управления находится из условия максимума функции H по переменной u с учетом наложенного ограничения (1) и имеет вид

$$u^o = \begin{cases} 0.25rk/(c\alpha_2), & 0.25r|k|/(c\alpha_2) \le u_{\max}, \\ u_{\max} signk, & 0.25r|k|/(c\alpha_2) > u_{\max}. \end{cases} \tag{7}$$

Здесь $k = \Delta N_1 \cos\varphi + \Delta N_2 \sin\varphi$.

3. Условия трансверсальности. Вводя неопределенные множители Лагранжа A_1, A_2, A_3, получим условия трансверсальности, соответствующие многообразию конечных состояний (4), в следующем виде:

$$\text{при } t = t_1, \ \Delta\boldsymbol{M} + \mathbf{A} = 0, \ \mathbf{A} = A_1\boldsymbol{i}_1 + A_2\boldsymbol{i}_2 + A_3\boldsymbol{i}_3, \ \chi = 0. \tag{8}$$

Из (8) получаем следующие условия трансверсальности, не содержащие неопределенных множителей Лагранжа:

$$\text{при } t = t_1, \ \Delta M_0 = 0, \ \chi = 0. \tag{9}$$

4. Анализ задачи. Таким образом, задача сведена к краевой задаче с подвижным правым концом траектории, описываемой системой нелинейных дифференциальных уравнений (2), (6), (7) десятого порядка и восемью краевыми условиями (3), (4), которые необходимо дополнить двумя условиями трансверсальности (9) и равенством $H^o|_{t_1} = H(\Delta\boldsymbol{\Lambda}, \Delta\boldsymbol{M}, \chi, u^o)|_{t_1} = 0$, имеющим место для оптимального управления u^o и оптимальной траектории.

5. Пример численного решения задачи. На рисунке приведены результаты численного решения краевой задачи оптимальной переориентации эллиптической орбиты КА для интегрального квадратичного функционала качества (5). Безразмерные переменные r^b, t^b и управление u^b связаны с размерными переменными и управлением соотношениями $r = pr^b$, $t = Tt^b = \dfrac{p^2}{c}t^b$; $u = u_{\max}u^b$.

Начальные и конечные значения угловых элементов орбиты задавались равными:

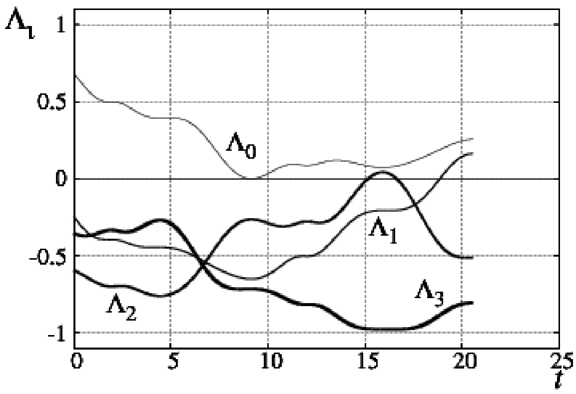
$$\begin{array}{lll} \Omega_u(0) = \Omega_u^0 = 40.0^\circ, & I(0) = I^0 = -70.57^\circ, & \omega_\pi(0) = \omega_\pi^0 = 84.98^\circ. \\ \Omega_u(t_1) = \Omega_u^* = 212.25^\circ, & I(t_1) = I^* = 64.8^\circ, & \omega_\pi(t_1) = \omega_\pi^* = 0.0^\circ. \end{array}$$

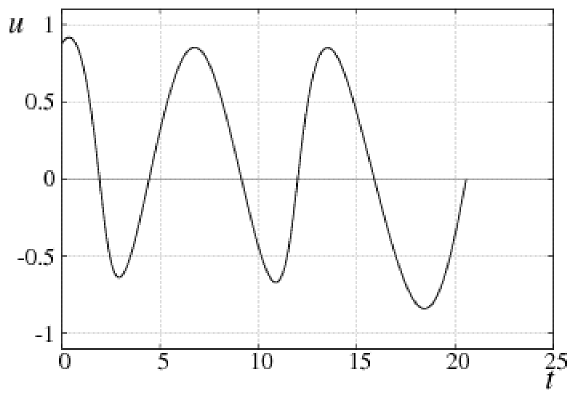
Здесь Ω_u – долгота восходящего узла, I – наклонение орбиты, ω_π – угловое расстояние до перицентра.

Конечные значения элементов орбиты отвечают ориентации орбиты одного из спутников орбитальной группировки ГЛОНАСС. Начальное положение орбиты КА рассчитано по начальным значениям декартовых координат и проекций скорости КА, приведенным в [2, с. 95]. Начальные и конечные значения кватерниона ориентации орбиты, соответствующие этим значениям угловых элементов, равны

$$\begin{array}{l} \mathbf{\Lambda}^0 = (0.678275, \ -0.245862, \ -0.593909, \ -0.353860); \\ \mathbf{\Lambda}^* = (-0.255650, \ -0.162241, \ \ 0.510674, \ \ 0.804694). \end{array}$$

Параметры задачи полагались следующими: $N = u_{\max}p^3/c^2 = 0.35$, $e = 0.5$, $\alpha_1 = \alpha_1^b = 1$, $\alpha_2^b = \alpha_2(u_{\max})^2 = 4.2$, $\varphi(0) = \varphi_0 = 3.940323$ рад.





Отметим некоторые особенности полученного решения. Переориентация орбиты совершается за 20.571204 единицы безразмерного веремени, что составляет в дуговой мере 13.348487 рад. Управление изменяет свой знак пять раз. Конечное значение управления близко к нулю.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00 310).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения // Геометрия и кинематика движения. М.: Физматлит, 2006. 512 с.

2. *Бордовицына Т.В.* Современные численные методы в задачах небесной механики. М.: Наука, 1983. 136 с.

УДК 539.3

Я.А. Парфёнова

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ЖЕСТКОСТИ УПРУГОГО ЗАКРЕПЛЕНИЯ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В УПРУГОМ ИЗОТРОПНОМ СЛОЕ

Исследование процессов распространения гармонических волн в изотропных упругих волноводах продолжается более 125 лет. Можно считать, что к настоящему времени характеристики кругового (цилиндра) и плоского (слоя) волноводов получены и систематизированы исчерпывающим образом. Однако, практически отсутствуют работы, посвящённые исследованию волноводов с упругим закрепление границ. Введение условий упругого закрепления представляется целесообразным, так как позволяет моделировать влияние окружающей среды на волновые процессы без решения сложных контактных задач. Данная статья продолжает цикл статей [1, 2] и посвящена исследованию процесса распространения волн растяжения-сжатия в изотропном слое с упруго закреплёнными в касательном направлении границами.

Рассмотрим плоское напряженное состояние бесконечного упругого изотропного слоя толщины $2h$, который свободен от внешних нагрузок ($|x_2| \leq h$, $|x_1| \leq \infty$, $|x_3| \leq \infty$). В качестве основных примем уравнения Ламе для случая плоского напряженного состояния. Упругому закреплению границ слоя в касательном направлении соответствуют граничные условия

$$\tau_{21} + du_1 = 0\,, \quad \tau_{22} = 0\,, \quad \text{при} \quad x_2 = \pm h\,, \tag{1}$$

где d – размерный параметр, характеризующий жесткость закрепления, при $d \to 0$ слой имеет свободные границы, а при $d \to \infty$ – жестко закреплённые. В силу зеркальной симметрии слоя относительно плоскости $x_2 = 0$ все возможные моды в нём можно разделить на антисимметричные (они были исследованы в [2]) и симметричные по нормальной координате, которые и изучаются в данной статье.