Соответствующие асимптотики имеют вид

$$\omega^2 = (\Omega_3)^2 + \left(1 - \frac{2\Omega_3^2}{\delta_0}\right)\eta^2 + \frac{3}{\delta_0^2}(\Omega_3^2 + 2\delta_0)\eta^4 + O(\eta^6)\,, \tag{12}$$

$$\Omega^2 = (\Omega_2)^2 + \frac{1}{\kappa^2}\eta^2 - \frac{8}{\delta_0}\eta^4 + O(\eta^6)\,, \tag{13}$$

где $\Omega_3 = \pi(2n-1)/2$ $(n = 1, 2, \dots)$.

Сравнение асимптотик (8), (9), (10), (12) и (13) с соответствующими численными решениями показало высокую точность их совпадения. Случай конечных δ_0 будет рассмотрен отдельно.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Moukhomodiarov R.R., Pichugin A.V., Rogerson G.A.* The Transition between Neumann and Dirichlet Boundary Conditions in Isotropic Elastic Plates // Mathematics and Mechanics of Solids, 2009. Published online, doi:10.1177/1081286509103781.

2. *Коссович Л.Ю., Мухомодьяров Р.Р., Парфёнова Я.А.* Распространение волн в упруго-закреплённом изотропном слое // Вестн. Самар. ун-та. Естественно-научная сер.: Механика. 2008. № 8/2. С. 78–88.

УДК 629.78

Я.Г. Сапунков

ОПТИМАЛЬНЫЙ ВЫВОД НА ОРБИТУ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С КОМБИНИРОВАННОЙ ТЯГОЙ

В статье с использованием кватернионных элементов орбиты с помощью принципа максимума Понтрягина решена пространственная задача об оптимальном выводе космического аппарата (КА) с комбинированной тягой на заданную круговую орбиту. Даны результаты численного решения.

1. В безразмерных кватернионных элементах орбиты $\mathbf{A} = (A_0, A_1, A_2, A_3)$, $\mathbf{B} = (B_0, B_1, B_2, B_3)$ движение КА с комбинированной тягой описывается системой уравнений (t – время, φ – независимая вспомогательная переменная)

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\varphi} = -Q\mathbf{F}_1 \sin\varphi, \frac{d\mathbf{B}}{d\varphi} = Q\mathbf{F}_1 \cos\varphi, \frac{dt}{d\varphi} = u^2\sqrt{2Q},$$

$$Q = A^2 + B^2, \mathbf{q} = P(\mathbf{u})(\mathbf{p}_1 + \varepsilon\mathbf{p}_2), \mathbf{F}_1 = u^2\mathbf{q} + (\mathbf{w},\mathbf{q})\mathbf{w}, \tag{1}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\cos\varphi + \ \mathbf{B}\sin\varphi, \mathbf{w} = -\mathbf{A}\sin\varphi + \mathbf{B}\cos\varphi.$$

Радиус-вектор положения КА $\mathbf{r}$ и вектор скорости $\mathbf{v}$ связаны с кватернионными элементами орбиты соотношениями

$$P(\mathbf{u}) = \begin{Vmatrix} u_0 & -u_3 & u_2 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ -u_2 & u_1 & u_0 \\ -u_3 & -u_0 & u_1 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{r} = P^T(\mathbf{u})\mathbf{u}, \mathbf{v} = \frac{2}{r(2Q)^{1/2}} P^T(\mathbf{u})\mathbf{w}.$$

Безразмерные управляющие векторные параметры, характеризующие тягу, удовлетворяют ограничениям $|\mathbf{p}_1| \leqslant p_{1\max}, |\mathbf{p}_2| \leqslant 1$.

Размерные масштабные множители для расстояния, скорости, времени и двух тяг КА определяются выражениями

$$R, (\gamma M/R)^{1/2}, R^{3/2}/(\gamma M)^{1/2}, \gamma M/R^2,$$
$$p^*_{2\max}, p_{1\max} = \frac{p^*_{1\max}}{\gamma M R^{-2}}, \frac{p^*_{2\max}}{\gamma M R^{-2}} = \varepsilon << 1.$$

Состояние КА в начальный момент времени

$$t = 0, \varphi = 0, \mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{н}}, \mathbf{B} = \mathbf{B}_{\text{н}}. \tag{2}$$

Круговая орбита, на которую необходимо перевести КА, характеризуется классическими элементами орбиты $a = a_k$, $e = 0$, $i = i_k$, $\Omega = \Omega_k$.

Критерий оптимальности процесса управления определяется функционалом с весовыми множителями $\alpha_i \geqslant 0, i = 0, 1, 2$:

$$I = \int\limits_0^{t_k} (\alpha_0 + \alpha_1 |\mathbf{p}_1| + \varepsilon^2 \alpha_2 p_2^2) dt = \int\limits_0^{\varphi_k} (\alpha_0 + \alpha_1 |\mathbf{p}_1| + \varepsilon^2 \alpha_2 p_2^2) u^2 (2Q)^{1/2} d\varphi,$$

который для оптимального процесса принимает минимальное значение.

2. Функция Гамильтона—Понтрягина выражается через сопряженные кватернионные переменные ψ_a, ψ_b, соответствующие кватернионным элементам A, B, по формуле

$$H = -(\alpha_0 + \alpha_1 |\mathbf{p}_1| + \varepsilon^2 \alpha_2 p_2^2) u^2 Q^{1/2} + Q(\mathbf{F}_1, \mathbf{\Pi}), \mathbf{\Pi} = \psi_b \cos\varphi - \psi_a \sin\varphi.$$

Сопряженные переменные удовлетворяют сопряженной системе

$$\frac{d\psi_a}{d\varphi} = \mathbf{F}_2 \cos\varphi + \mathbf{F}_3 \sin\varphi + \mathbf{A}F_4, \frac{d\psi_b}{d\varphi} = \mathbf{F}_2 \sin\varphi - \mathbf{F}_3 \cos\varphi + \mathbf{B}F_4. \quad (3)$$

Условия для фазовых координат на правом конце траектории имеют вид

$$\begin{array}{l} A^2 - a_k = 0, B^2 - a_k = 0, (\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 0, \\ l(\mathbf{B}, P(\mathbf{A})\mathbf{j}_1) - a_k \sin i_k \sin\Omega_k = 0, l(\mathbf{B}, P(\mathbf{A})\mathbf{j}_3) - a_k \cos i_k = 0. \end{array} \quad (4)$$

Условия трансверсальности на правом конце траектории

$$\begin{array}{c} l(\psi_a, \mathbf{A}) + l(\psi_b, \mathbf{B}) = 0, l(\psi_a, P(\mathbf{B})\mathbf{j}_1) + l(\psi_b, P(\mathbf{A})\mathbf{j}_1) = 0, \\ a_k[l(\psi_a, P(\mathbf{A})\mathbf{j}_3) + l(\psi_b, P(\mathbf{B})\mathbf{j}_3)] + \\ l(\mathbf{A}, P(\mathbf{B})\mathbf{j}_2)[l(\psi_a, P(\mathbf{B})\mathbf{j}_1) - l(\psi_b, P(\mathbf{A})\mathbf{j}_1)] = 0. \end{array} \quad (5)$$

Функция Гамильтона—Понтрягина удовлетворяет условию

$$H_{\mathrm{opt}} = 0. \quad (6)$$

Оптимальное управление согласно условию максимума для функции Гамильтона—Понтрягина выражается через фазовые и сопряженные переменные по формулам

$$\mathbf{p}_{1opt} = \frac{P^T(\mathbf{u})(u^2\mathbf{\Pi} + \mathbf{w}(\mathbf{w}, \mathbf{\Pi}))}{|P^T(\mathbf{u})(u^2\Pi) + \mathbf{w}(\mathbf{w}, \mathbf{\Pi})|} p_{1\max},$$

если

$$\left|P^T(\mathbf{u})(u^2\mathbf{\Pi} + \mathbf{w}(\mathbf{w}, \mathbf{\Pi}))\right| \geqslant \frac{\alpha_1 u^2}{Q^{1/2}},$$

$$\mathbf{p}_{1opt} = 0, \text{если } \left|P^T(\mathbf{u})(u^2\Pi + \mathbf{w}(\mathbf{w}, \mathbf{\Pi}))\right| < \frac{\alpha_1 u^2}{Q^{1/2}}, \quad (7)$$

$$\mathbf{p}_{2opt} = \frac{P^T(\mathbf{u})(u^2\mathbf{\Pi} + \mathbf{w}(\mathbf{w}, \mathbf{\Pi}))}{|P^T(\mathbf{u})(u^2\mathbf{\Pi}) + \mathbf{w}(\mathbf{w}, \mathbf{\Pi})|},$$

если

$$\left|P^T(\mathbf{u})(u^2\mathbf{\Pi} + \mathbf{w}(\mathbf{w}, \mathbf{\Pi}))\right| \geqslant \frac{2\varepsilon\alpha_2 u^2}{Q^{1/2}},$$

$$\mathbf{p}_{2opt} = \frac{Q^{1/2}}{2\varepsilon\alpha_2 u^2} P^T(\mathbf{u})(u^2\mathbf{\Pi} + \mathbf{w}(\mathbf{w}, \mathbf{\Pi})),$$

если

$$\frac{Q^{1/2}}{2\varepsilon\alpha_2 u^2}\left|P^T(\mathbf{u})(u^2\mathbf{\Pi}+\mathbf{w}(\mathbf{w},\mathbf{\Pi}))\right| < 1. \qquad (8)$$

Решение задачи оптимального управления сводится к решению краевой задачи для системы уравнений (1), (3) с граничными условиями (2) в начальный момент времени и условиями (4), (5). (6) в конечный момент времени, при этом в каждый момент времени управляющие параметры определяются из соотношений (7), (8).

3. Пример расчета. Начальное состояние КА определяется координатами: $x_1 = 1.0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $v_1 = 0$, $v_2 = 1.0$, $v_3 = 0$. Классические элементы конечной орбиты: $a_k = 1.52$, $e_k = 0.0$, $i_k = 5.0°$, $\Omega_k = 30.0°$. Весовые множители в функционале качества процесса: $\alpha_0 = 0.35$, $\alpha_1 = 1.0$, $\alpha_2 = 0.5$. Ограничения на управляющие параметры: $p_{1\,\max} = 1.0$, $\varepsilon = 0.2$. Режим работы первого управляющего параметра состоит из трех этапов. На первом этапе $0 \leqslant t < 0.1086, |\mathbf{p}_1| = 1.0$, на втором $0.1086 \leqslant t < 2.0529, |\mathbf{p}_1| = 0.0$, на третьем $2.0529 \leqslant t < 2.1733, |\mathbf{p}_1| = 1.0$. В конечный момент времени при $t = 2.1733$ при выходе на заданную орбиту состояние КА определяется координатами:

$$x_1 = -0.0797, x_2 = 1.5133, x_3 = 0.1181,$$

$$v_1 = -0.8092, v_2 = -0.0451, v_3 = 0.0320.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00310).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Штифель Е., Шейфиле Г.* Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975. 304 с.

УДК 533.6.011

Я.Г. Сапунков, Р.В. Мосин

К ЗАДАЧЕ О СХОДЯЩЕЙСЯ УДАРНОЙ ВОЛНЕ

В статье получено приближенное аналитическое решение задачи о сходящейся ударной волне, хорошо аппроксимирующее точное решение во всей области течения газа. Приводятся таблицы значений показателей автомодельности в зависимости от отношения теплоемкостей, полученных на основе приближенного решения, и их погрешности.