если

$$\frac{Q^{1/2}}{2\varepsilon\alpha_2 u^2}\left|P^T(\mathbf{u})(u^2\mathbf{\Pi}+\mathbf{w}(\mathbf{w},\mathbf{\Pi}))\right| < 1. \tag{8}$$

Решение задачи оптимального управления сводится к решению краевой задачи для системы уравнений (1), (3) с граничными условиями (2) в начальный момент времени и условиями (4), (5). (6) в конечный момент времени, при этом в каждый момент времени управляющие параметры определяются из соотношений (7), (8).

3. Пример расчета. Начальное состояние КА определяется координатами: $x_1 = 1.0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $v_1 = 0$, $v_2 = 1.0$, $v_3 = 0$. Классические элементы конечной орбиты: $a_k = 1.52$, $e_k = 0.0$, $i_k = 5.0^\circ$, $\Omega_k = 30.0^\circ$. Весовые множители в функционале качества процесса: $\alpha_0 = 0.35$, $\alpha_1 = 1.0$, $\alpha_2 = 0.5$. Ограничения на управляющие параметры: $p_{1\,\max} = 1.0$, $\varepsilon = 0.2$. Режим работы первого управляющего параметра состоит из трех этапов. На первом этапе $0 \leqslant t < 0.1086, |\mathbf{p}_1| = 1.0$, на втором $0.1086 \leqslant t < 2.0529, |\mathbf{p}_1| = 0.0$, на третьем $2.0529 \leqslant t < 2.1733, |\mathbf{p}_1| = 1.0$. В конечный момент времени при $t = 2.1733$ при выходе на заданную орбиту состояние КА определяется координатами:

$$x_1 = -0.0797, x_2 = 1.5133, x_3 = 0.1181,$$

$$v_1 = -0.8092, v_2 = -0.0451, v_3 = 0.0320.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00310).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Штифель Е., Шейфиле Г.* Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975. 304 с.

УДК 533.6.011

Я.Г. Сапунков, Р.В. Мосин

К ЗАДАЧЕ О СХОДЯЩЕЙСЯ УДАРНОЙ ВОЛНЕ

В статье получено приближенное аналитическое решение задачи о сходящейся ударной волне, хорошо аппроксимирующее точное решение во всей области течения газа. Приводятся таблицы значений показателей автомодельности в зависимости от отношения теплоемкостей, полученных на основе приближенного решения, и их погрешности.

1. В работе [1] показано, что уравнения движения идеального совершенного газа в задаче о сходящейся ударной волне в безразмерных автомодельных переменных могут быть приведены к виду

$$
\begin{gathered}
\frac{dV}{d\ln\lambda} = -\left[(\nu+1)V - \frac{2}{\gamma}(1-\alpha)\right] + (V-\alpha)\frac{\Delta_4}{\Delta_0}, \\
\frac{d\ln R}{d\ln\lambda} = -\frac{2(1-\alpha)}{\gamma(V-\alpha)} - \frac{\Delta_4}{\Delta_0}, \\
\frac{dZ}{d\ln\lambda} = -Z\left\{\frac{2}{V-\alpha}\left[V - \frac{1+\alpha(\gamma-1)}{\gamma}\right] + (\gamma-1)\frac{\Delta_4}{\Delta_0}\right\},
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где

$$
\Delta_4(V) = \nu V^2 - \left[(\nu+1)\alpha + \frac{2}{\gamma}(1-\alpha) - 1\right]V + 2\frac{\alpha}{\gamma}(1-\alpha),
$$

$$
\Delta_0 = (V-\alpha)^2 - Z.
$$

Здесь $\nu = 1$ соответствует цилиндрической симметрии, $\nu = 2$ – сферической симметрии, γ – отношение теплоемкостей, α – показатель автомодельности в законе движения ударной волны. Размерные переменные связаны с автомодельными переменными соотношениями

$$
\lambda = \frac{r}{A(-t)^\alpha}, \quad v = \frac{r}{t}V, \quad \rho = \rho_0 R, \quad p = \frac{\rho_0}{\gamma}\frac{r^2}{t^2}ZR.
$$

Закон движения сходящейся ударной волны $r = r_s(t) = A(-t)^\alpha$, $t < 0$. Начальная плотность газа $\rho_0 = \mathrm{const}$. Граничные условия для автомодельных переменных на поверхности ударной волны

$$
V(1) = V_s = \frac{2\alpha}{\gamma+1}, R(1) = R_s = \frac{\gamma+1}{\gamma-1},\ Z(1) = Z_s = \frac{2\alpha^2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}. \tag{2}
$$

2. Для упрощения системы (1) отношение Δ_4/Δ_0 в первом приближении в [1] полагалось постоянной величиной, во втором приближении – линейной функцией V [2], в настоящей статье это отношение представлено квадратичной функцией V:

$$
\frac{\Delta_4}{\Delta_0} = K + a(V-V_s) + a_1(V-V_s)^2,
$$

$$
K = -\frac{2}{\alpha(\gamma-1)}\left[\left(2-\frac{1}{\gamma}\right)(1-\alpha) - \nu\alpha\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right],
$$

$$a=\frac{1}{\Delta_{0s}}\left\{2\nu V-\left[(\nu+1)\,\alpha+\frac{2}{\gamma}\,(1-\alpha)\right]-K\left[2\,(V-\alpha)-\frac{\Delta_3}{\Delta_1}\right]\right\}_s.$$

Величина a_1 выбрана из условия, что левая часть первого уравнения системы (1) при $V=0$ обращалась в нуль. В этом случае правые части уравнений системы (1) хорошо аппроксимируют поведение правых частей в системе точных уравнений во всей области течения. Для величины a_1 получено следующее выражение:

$$a_1=\left(\frac{2}{\alpha\gamma}-\frac{2}{\gamma}-K+aV_s\right)V_s^{-2}.$$

В результате, в частности, первое уравнение системы (1) принимает вид

$$\frac{dV}{d\ln\lambda}=a_1V(V^2+b_2V+c_2),\;\; b_2=aa_1^{-1}-2V_s-\alpha,$$
$$c_2=[K-\nu-1-a(V_s+\alpha)]a_1^{-1}+V_s(V_s+2\alpha).$$

Решение упрощенных уравнений с учетом условий (2) имеет вид

$$\lambda=\left[\frac{V^2(V_s^2+b_2V_s+c_2)}{V_s^2(V^2+b_2V+c_2)}\right]^{\frac{1}{2a_1c_2}}\exp\left(-\frac{b_2}{2a_1c_2}\Phi(V)\right),$$

$$Z=Z_s\left(\frac{V}{V_s}\right)^{D_1}\left(\frac{\alpha-V}{\alpha-V_s}\right)^{D_2}\left(\frac{V^2+b_2V+c_2}{V_s^2+b_2V_s+c_2}\right)^{0.5D_4}\exp((D_3-0.5b_2D_4)\Phi(V)),$$

$$R=R_s\left(\frac{\alpha-V}{\alpha-V_s}\right)^{N_2}\left(\frac{V^2+b_2V+c_2}{V_s^2+b_2V_s+c_2}\right)^{0.5N_4}\exp((N_3-0.5b_2N_4)\Phi(V)),$$

$$\Phi(V)=\frac{1}{\sqrt{c_2-0.25b_2^2}}\left(\operatorname{arctg}\frac{V+0.5b_2}{\sqrt{c_2-0.25b_a^2}}-\operatorname{arctg}\frac{V_s+0.5b_2}{\sqrt{c_2-0.25b_2^2}}\right),$$

$$a_2=\alpha^2+b_2\alpha+c_2, a_3=K-aV_s+a_1(V_s^2-a_2), a_4=2V_s+\alpha+b_2-aa_1^{-1},$$

$$D_4=\frac{\gamma-1}{aa_2}\left[2\frac{b_2+\alpha+c_2}{(\gamma-1)\,c_2}+a_3\right], D_3=(\gamma-1)a_4+(\alpha+b_2)D_4-\frac{2}{a_1c_2},$$

$$D_1=-\frac{2}{\alpha a_1c_2}, D_2=1-\gamma-D_1-D_4,$$

$$N_4=\frac{a_3}{a_1a_2}, N_2=-1-N_4,\;\; N_3=a_4+(\alpha+b_2)N_4. \tag{3}$$

Координаты особой точки B, соответствующей предельной характеристике, определяются из условия $\Delta_0=0,\;\;\Delta_4=0$.

Для определения α вместе с этими соотношениями служит уравнение

$$Z_B = Z_s \left(\frac{V_B}{V_s}\right)^{D_1} \left(\frac{V_B-\alpha}{V_s-\alpha}\right)^{D_2} \left(\frac{V_B^2+b_2V_B+c_2}{V_s^2+b_2V_s+c_2}\right)^{0.5D_4} \times \\ \times \exp((D_3-0.5b_2D_4)\Phi(V_B)). \qquad (4)$$

Уравнение (4) решается численно методом Ньютона, в результате чего получены значения показателей автомодельности α в зависимости от отношения теплоемкостей для случаев цилиндрической (табл. 1) и сферической (табл. 2) симметрии.

Таблица 1

γ	1.1	1.2	1.3	1.4	1.6
$\alpha_{\text{точн}}$	0.885225	0.861141	0.846203	0.835306	0.819688
$\alpha_{\text{прибл2}}$	0.885285	0.861171	0.846223	0.835321	0.819698
$\Delta\alpha\%$	0.0067	0.0035	0.0024	0.0018	0.0012
$\alpha_{\text{прибл3}}$	0.885298	0.861182	0.846231	0.835327	0.819700
$\Delta\alpha\%$	0.0082	0.0047	0.0033	0.0025	0.0015

Таблица 2

γ	1.1	1.2	1.3	1.4	1.6
$\alpha_{\text{точн}}$	0.795933	0.757107	0.733745	0.717146	0.694156
$\alpha_{\text{прибл2}}$	0.796164	0.757206	0.733797	0.717179	0.694187
$\Delta\alpha\%$	0.03	0.01	0.007	0.005	0.005
$\alpha_{\text{прибл3}}$	0.796176	0.757221	0.733811	0.717190	0.694192
$\Delta\alpha\%$	0.03	0.01	0.009	0.006	0.005

В табл. 1, 2, кроме точных значений α, полученных на основе численного решения полных уравнений, представлены приближенные значения показателей автомодельности, полученные на основе аналитических решений второго приближения [2], и приближения, полученные в настоящей работе, погрешности приближенных значений. Из сравнения данных, представленных в таблицах, видно, что точность приближенного решения, полученного в настоящей статье, соответствует точности второго приближения [2], но полученное здесь приближение хорошо аппроксимирует точное решение во всей области течения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Сапунков Я.Г.* Приближенное аналитическое решение задачи о сходящейся ударной волне // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2007. Вып. 9. С. 145–147.

2. *Сапунков Я.Г.* Второе приближение решения задачи о сходящейся ударной волне // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 132–135.