УДК 531.38

**Г.Д. Севостьянов**

# РАВНОБЕДРЕННАЯ КОНФИГУРАЦИЯ В ПЛОСКОЙ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЁХ ТЕЛ

Показано, что два тела в углах основания равнобедренного треугольника плоской задачи трёх тел взаимно притягиваются центральной силой, состоящей из гравитационной и упругой сил.

Движение в системе трёх тел в барицентрической основной правой системе $G\xi\eta\zeta$ описывается уравнениями [1]

$$m_k\ddot{\mathbf{r}}_k = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_k}, U = f(\frac{m_0 m_1}{\Delta_{01}} + \frac{m_1 m_2}{\Delta_{12}} + \frac{m_2 m_0}{\Delta_{20}}), \sum_{k=0}^{2} m_k \mathbf{r}_k = 0, \qquad (1)$$

где $m_k$ – масса тела $M_k$ $(k = 0, 1, 2)$, $\mathbf{r}_k = \overline{GM_k}(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ – вектор с началом в центре масс $G$, $U$ – потенциальная силовая функция системы, $f > 0$ — гравитационная постоянная, $\Delta_{ij} = M_i M_j$.

Уравнения относительных движений $(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i = \Delta_{ij})$ запишем в виде

$$\ddot{\Delta}_{ij} = -\mu\frac{\mathbf{e}_{ij}}{\Delta_{ij}^2} + m_k\mathbf{F}_c, \mu = f(m_0 + m_1 + m_2),$$

$$\mathbf{F}_c = f(\frac{\mathbf{e}_{01}}{\Delta_{01}^2} + \frac{\mathbf{e}_{12}}{\Delta_{12}^2} + \frac{\mathbf{e}_{20}}{\Delta_{20}^2})(k \neq i, j; i, j, k = 0, 1, 2). \qquad (2)$$

Здесь $\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{\Delta}_{ij}/\Delta_{ij}$ — орт стороны $M_i M_j$ треугольника тел. $\mathbf{F}_c = 0$ для равносторонней конфигурации (Лагранж, 1772 г.), и неограниченная задача сводится к трём задачам одного тела [1, 2].

С плоскостью трёх тел свяжем правую систему $Gxyz$ (ось $Gz$ перпендикулярна к этой плоскости, ось $Gx$ параллельна прямой $M_0M_1$ и направлена в сторону $\mathbf{e}_{01}$). $GT$ – линия узлов. Для узлов Эйлера $J\Omega\Phi$ ($J = \angle\zeta Gz$ – наклонность, угол нутации; $\Omega = \angle\xi GT$ – долгота узла, угол прецессии; $\Phi = \angle TGx$ – угол собственного вращения) имеем кинематические уравнения Эйлера (см. [1]) в случае известных координат угловой скорости $\omega$ вращения этой плоскости около $G$ (в связанной системе $Gxyz$). Уравнения Эйлера сводятся [3] к уравнению второго порядка для $J(t)$.

В случае плоской неограниченной задачи трёх тел ($\dot{J} = \dot{\Omega} \equiv 0, \omega = \dot{\Phi}$), разложив в (2) ускорения на радиальные и трансверсальные, придём к уравнениям Рауса (E.G. Routh, 1875 ) [4].

Обозначим через $\varphi_k$ угол треугольника тел при вершине $M_k$, $(k = 0, 1, 2)$, через $\alpha_k$ — угол между прямой $GT$ и ортом $\mathbf{e}_{k,k+1}$.

Если тела при движении образуют *равнобедренный* треугольник с постоянными боковыми сторонами и переменными углами $(\Delta_{01} = \Delta_{20} = a, \varphi_1 = \varphi_2, \Delta_{12} = \Delta)$, то из (2) вектор

$$\mathbf{F}_c = f(\frac{1}{\Delta^2} - \frac{\Delta}{a^3})\mathbf{e}_{12} \tag{3}$$

*параллелен основанию* $M_1M_2$ треугольника тел. Тогда относительное движение $M_2$ около $M_1$ описывается уравнением с центральной притягивающей силой

$$m_2\ddot{\mathbf{\Delta}}_{12} = -f\frac{m_1+m_2}{\Delta^2}m_2\mathbf{e}_{12} - fm_0m_2\frac{\Delta}{a^3}\mathbf{e}_{12}, \tag{4}$$

которая состоит из гравитационной и упругой сил.

Отсюда имеем интеграл площадей и уравнение для $\Delta(t)$:

$$\dot{\alpha}_2\Delta^2 = c_2, \ddot{\Delta} = \frac{c_2^2}{\Delta^3} - f(\frac{m_1+m_2}{\Delta^2} + \frac{m_0}{a^3}\Delta) = F(\Delta). \tag{5}$$

Тогда придём к квадратурам:

$$t = \int\frac{d\Delta}{H(\Delta)} + c_{**} = t(\Delta), \alpha_2 = c_2\int\frac{dt}{\Delta^2(t)} + c_{***},$$

$$H^2(\Delta) = -\frac{c_2^2}{\Delta^2} + 2f\frac{m_1+m_2}{\Delta} - f\frac{m_0}{a^3}\Delta^2 + c_*. \tag{6}$$

Интеграл $t(\Delta)$ — эллиптический, $\Delta(t)$ — эллиптическая функция. Углы треугольника тел:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \arccos\frac{\Delta}{2a}, \varphi_0 = \pi - 2\varphi_1. \tag{7}$$

Из (4) следует, что при $\Delta >> \Delta_*$ упругая сила для тела $M_2$ преобладает над гравитационной, а при $\Delta << \Delta_*$ имеет место обратное преобладание, где

$$\Delta_* = a(\frac{m_1+m_2}{m_0})^{1/3}, \tag{8}$$

при этом в первом случае траектория $M_2$ относительно $M_1$ близка к эллипсу с центром в $M_1$, во втором – тело $M_1$ близко к фокусу эллипса для $M_2$, траектория в общем случае образует «розетку» $(\Delta < 2a)$.

При $\Delta = a$ в (3) придём к случаю лагранжевского решения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1968.
2. *Абалакин В.К., Аксёнов Е.П., Гребенников Е.А. и др.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976.
3. *Севостьянов Г.Д.* О линейности кинематической задачи Дарбу для тела с неподвижной точкой // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 195–198.
4. *Ляпунов А.М.* Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трёх телах // Собр. соч.: в 4 т. М.: Изд. АН СССР, 1954. Т.1. С. 327–401.



УДК 539.3



**О.А. Торопова**


# ФОРМУЛИРОВКА УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО НЕФТЕПОДЪЕМНИКА

При выводе уравнений будем использовать следующие основные гипотезы и допущения, принимаемые в задачах механики морских трубопроводов [1, 2]. Будем считать, что материал стенок нефтеподъемника является несжимаемым, то есть значение коэффициента Пуассона принимается равным $\nu = 0.5$, диаграмма его деформирования описывается нелинейной зависимостью напряжений от деформаций. Далее, толщина стенки нефтеподъемника вдоль его образующей является в общем случае непрерывной функцией осевой координаты, либо кусочно-непрерывной (для многосекционного нефтеподъемника).

Введем правую декартову систему координат $Ox_1x_2$, начало которой зафиксируем на морском дне, глубиной $H$ от поверхности моря. Ось $x_2$ направим вертикально вверх, ось $x_1$ – горизонтально вправо. Свяжем с центром тяжести произвольного поперечного сечения деформированного трубопровода орты $\{\vec{e}_i\}$, направив вектор $\vec{e}_1 = \vec{\tau}$ по касательной к осевой линии, а $\vec{e}_2 = \vec{n}$ – по ее нормали. За начало отсчета эйлеровой дуговой координаты $(s)$ выберем нижнее граничное сечение, находящееся в контакте с подводным технологическим оборудованием.

Здесь

$$\vec{e}_i = L\vec{e}_0, \qquad L = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_0 = \begin{pmatrix} \vec{i}_2 \\ \hline -\vec{i}_1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

причем

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{n} \qquad \frac{d\vec{n}}{ds} = -k\vec{\tau}. \tag{2}$$

$k = k(s)$ — кривизна деформированной осевой линии нефтеподъемника.