УДК 517.54

Е.В. Разумовская

ОБ ОДНОЛИСТНОСТИ ОДНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Пусть $\Pi = \{z : 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$, $\Omega = \{z : -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$, f — конформное отображение Π в себя. *Угловыми производными* f *в бесконечно удаленных точках* Π называются $c^{\pm}(f) = \lim\limits_{\operatorname{Re} z \to \pm\infty} (z - f(z))$, $z \in \Pi_\alpha = \{z : \alpha < \operatorname{Im} z < (1-\alpha)\pi\}$, $\alpha \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$. Совокупность всех конформных отображений $f : \Pi \to \Pi$ с $c^{\pm}(f) < \infty$ обозначают $\mathcal{I}$, а через $\mathcal{I}_0$ обозначают подмножество f из $\mathcal{I}$, которые, оставляя инвариантной вещественную ось, аналитически продолжаются через неё в полосу Ω с $f(0) = 0$.

В работе [1] получен полный аналог уравнения Лёвнера для конформных отображений полосы, причём в данной конструкции, как и в классической конструкции Лёвнера, присутствует «стирание» разреза. Однако, в отличие от классического случая, когда параметризация связана с конформным радиусом переменной области, здесь временной параметр выбран как разность $\gamma(f) = c^+(f) - c^-(f)$ с целью сохранения граничных условий. А именно, если Γ_t — жорданова кривая в $\Pi : \xi = \psi(s)$, $t \le s \le T$, $\operatorname{Im}\psi(T) = \pi$, $0 \le t \le T$, $D_t = \Pi \setminus \Gamma_t$, то семейство отображений $g_t : \Pi \to D_t$, $g_t \in \mathcal{I}_0$ с $\gamma(g_t) = T - t$ является решением задачи Коши

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t(z) = \frac{\partial}{\partial z} g_t(z) \frac{e^z - 1}{e^z + e^{k(t)}} \cdot \frac{1}{1 + e^{-k(t)}},$$

$$g_t(z)|_{t=T} \equiv z,$$

где $k(t)$ — непрерывная вещественнозначная функция и $g_t^{-1}(\psi(t)) = k(t) + i\pi$.

Рассмотрим вопрос об однолистности этого семейства отображений.

Введем цепь подчинения:

$$w(z,t) = \exp(g_t(\log z)), \quad \operatorname{Im} z > 0,$$

функций, отображающих верхнюю полуплоскость на верхнюю полуплоскость с разрезом по жордановой кривой $L(t) : 0 \le t \le t_0$, $\operatorname{Im} L(t_0) = 0$, причем выбираем ветвь логарифма, дающую Π. В такой конструкции сохраняется «гидродинамическая» нормировка:

$$\lim_{z \to \infty} (w(z,t) - z) = 0,$$

обеспеченная конечностью угловой производной $c^+(f) = \lim\limits_{\operatorname{Re} z\to+\infty}(z-$ $- g_t(z))$ с дополнительным условием — «стягиванием» к нулю верхней полуокрестности $z = 0$, вызываемым конечностью $c^-(f) = \lim\limits_{\operatorname{Re} z\to-\infty}(z-$ $- g_t(z))$.

Используем условие однолистности производящей функции для полуплоскости:

$$\operatorname{Im} \frac{\frac{\partial w}{\partial z}(z,t)}{\frac{\partial w}{\partial t}(z,t)} > 0, \quad \operatorname{Im} z > 0.$$

В нашем случае оно эквивалентно условию

$$e^{k(t)} > \frac{|z|^2}{1-2\operatorname{Re} z}, \quad \operatorname{Re} z < \frac{1}{2}.$$

Обозначив $e^{k(t)} = A$, получаем в Π область Π_A, ограниченную $w_1^{(1)} =$ $= \log(\sqrt{A^2+A}e^{i\varphi} - A)$, $0 \leq \varphi \leq \pi$; $w_1^{(2)} = t + i \cdot 0$, $-\infty < t <$ $< \log(\sqrt{A^2+A} - A)$; $w_1^{(3)} = t + i\pi$, $-\infty < t < \log(\sqrt{A^2+A}+$ $+ A)$, которая однолистно отображается g_t на часть D_t, так как в цепи подчинения остальные (за исключением g_t) отображения обладали свойством однолистности.

Таким образом, получили теорему:

Теорема. *Для отображения g_t существует область $\Pi_A \subset \Pi$, отображаемая g_t однолистно. Эта область ограничена следующими кривыми: $w_1^{(1)} = \log(\sqrt{A^2+A}e^{i\varphi} - A)$, $0 \leq \varphi \leq \pi$; $w_1^{(2)} = t + i \cdot 0$, $-\infty < t <$ $< \log(\sqrt{A^2+A} - A)$; $w_1^{(3)} = t + i\pi$, $-\infty < t < \log(\sqrt{A^2+A} + A)$, где $A = e^{k(t)}$.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Дубовиков Д.А.* Аналог уравнений Лёвнера для отображений полос // Изв. вузов. Сер. Математика. 2007. № 8(543). С. 77–80.

УДК 517.51

Е.В. Разумовская, В.Г. Тимофеев

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В [1] для класса функций $u \in C(R^n)$, $n \geq 2$, оператор Лапласа которых $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ принадлежит пространству $L_\infty(R^n)$ и