обеспеченная конечностью угловой производной $c^{+}(f) = \lim\limits_{\operatorname{Re} z\to+\infty}(z-$ $- g_t(z))$ с дополнительным условием — «стягиванием» к нулю верхней полуокрестности $z = 0$, вызываемым конечностью $c^{-}(f) = \lim\limits_{\operatorname{Re} z\to-\infty}(z-$ $- g_t(z))$.

Используем условие однолистности производящей функции для полуплоскости:

$$\operatorname{Im}\frac{\frac{\partial w}{\partial z}(z,t)}{\frac{\partial w}{\partial t}(z,t)} > 0, \quad \operatorname{Im} z > 0.$$

В нашем случае оно эквивалентно условию

$$e^{k(t)} > \frac{|z|^2}{1-2\operatorname{Re} z}, \quad \operatorname{Re} z < \frac{1}{2}.$$

Обозначив $e^{k(t)} = A$, получаем в Π область Π_A, ограниченную $w_1^{(1)} = \log(\sqrt{A^2+A}e^{i\varphi} - A)$, $0 \leq \varphi \leq \pi$; $w_1^{(2)} = t + i\cdot 0$, $-\infty < t < \log(\sqrt{A^2+A} - A)$; $w_1^{(3)} = t + i\pi$, $-\infty < t < \log(\sqrt{A^2+A} + A)$, которая однолистно отображается g_t на часть D_t, так как в цепи подчинения остальные (за исключением g_t) отображения обладали свойством однолистности.

Таким образом, получили теорему:

Теорема. *Для отображения g_t существует область $\Pi_A \subset \Pi$, отображаемая g_t однолистно. Эта область ограничена следующими кривыми: $w_1^{(1)} = \log(\sqrt{A^2+A}e^{i\varphi} - A)$, $0 \leq \varphi \leq \pi$; $w_1^{(2)} = t + i\cdot 0$, $-\infty < t < \log(\sqrt{A^2+A} - A)$; $w_1^{(3)} = t + i\pi$, $-\infty < t < \log(\sqrt{A^2+A} + A)$, где $A = e^{k(t)}$.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Дубовиков Д.А.* Аналог уравнений Лёвнера для отображений полос // Изв. вузов. Сер. Математика. 2007. № 8(543). С. 77–80.

УДК 517.51

Е.В. Разумовская, В.Г. Тимофеев

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В [1] для класса функций $u \in C(R^n)$, $n \geq 2$, оператор Лапласа которых $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ принадлежит пространству $L_\infty(R^n)$ и понимается в обобщенном, по Соболеву, смысле, получено интегральное представление:

$$u(x) = -\frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(n-2)} \int\limits_{\partial\Pi_h} u(\xi)\frac{\partial G(\xi,x)}{\partial n_\xi}\, d\xi - \frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(n-2)} \int\limits_{\Pi_h} \Delta u(\xi) G(\xi,x)\, d\xi,$$

где $h > 0$, $\Pi_h = \{\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in R^n : -h < \xi_1 < h,\ -\infty < \xi_i < \infty,$ $i = \overline{2,n}\}$ — слой в R^n, $x \in \Pi_h$, а $G(\xi,x)$ — функция Грина этого слоя [2], которое позволило ввести понятие гармонической, субгармонической и полигармонической функций порядка n в слое Π_h, а именно функция $u(x)$ считается полигармонической порядка n в Π_h, если для любой области $D : \overline{D} \subset \Pi_h$, для всех точек x выражение

$$\Delta_h u(x) = -\frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(n-2)} \int\limits_{\partial\Pi_h} u(\xi)\frac{\partial G(\xi,x)}{\partial n_\xi}\, d\xi - u(x)$$

представляет собой полигармоническую функцию порядка $n-1$. Следуя [3], определим субгармоническую функцию условием $\Delta_h u(x) \geq$ ≥ 0.

В [1, 2] доказаны важные для практического использования свойства введенных функций. С точки зрения субгармонических функций является интересным рассмотрение среди них подклассов полигармонических функций порядка $n \geq 2$. Обозначим классы субгармонических функций, являющихся и полигармоническими порядка n, символом [4]

$$\{S\underbrace{\Gamma\Gamma\ldots\Gamma}_{n\ \text{раз}}\}. \tag{1}$$

Определим эти классы интегральным условием: $\Delta_h u \geq 0$ есть полигармоническая функция порядка $n-1$.

Для таким образом определенных функций справедливы, в частности, следующие теоремы.

Теорема 1. *Если семейство функций* (1) *в области* $D \subset \Pi_h$ *равномерно ограничено внутри* D, *то оно компактно внутри* D.

Доказательство. Проведем доказательство по индукции. Для $n = 1$ доказательство приведено в [3]. Семейство $\Delta_h u(x)$ субгармонических функций, принадлежащих $\{S\underbrace{\Gamma\Gamma\ldots\Gamma}_{(n-1)\ \text{раз}}\}$, будучи равномерно ограниченным в $D' \subset D$, $\overline{D}' \subset D$, будет компактным по предположенному в D', а следовательно, существует последовательность

$\{\Delta_h u_k(x)\}$, равномерно сходящихся внутри D' к функции класса $\{S\underbrace{\Gamma\Gamma\ldots\Gamma}_{(n-1)\text{ раз}}\}$. С другой стороны, последовательность

$$\left\{-\frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(n-2)}\int\limits_{\partial\Pi_h} u_k(\xi)\frac{\partial G(\xi,x)}{\partial n_\xi}\,d\xi\right\}$$

ограничена в совокупности в области D' и равностепенно непрерывна в ней. По теореме Арцела существует равномерно сходящаяся в D' подпоследовательность

$$\left\{-\frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(n-2)}\int\limits_{\partial\Pi_h} u_{k'}(\xi)\frac{\partial G(\xi,x)}{\partial n_\xi}\,d\xi\right\}.$$

Тогда последовательность функций

$$u_{k'}(x)=-\frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(n-2)}\int\limits_{\partial\Pi_h} u_{k'}(\xi)\frac{\partial G(\xi,x)}{\partial n_\xi}\,d\xi-\Delta_h u_{k'}(x)$$

будет равномерно сходиться внутри D', причем в силу теорем сравнения и равномерной сходимости последовательности предельная функция будет принадлежать (1). Чтобы исключить зависимость выделенной последовательности от множества D', применим диагональный процесс, результатом которого является утверждение о равномерной сходимости последовательности внутри D.

Аналогично доказывается и нижеследующая теорема.

Теорема 2. *Если последовательность функций $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_k(x), \ldots$ принадлежит классу* (1) *в области D и равномерно ограничена внутри D; если эта последовательность сходится на некоторой частичной области d, $\overline{d}\subset D$, то она сходится всюду в области D к функции класса* (1)*, причем равномерно внутри D.*

Если рассмотреть частный класс субгармонических функций $\{S\Gamma\Gamma\}$, то для него условие компактности может быть сформулировано в следующем виде.

Теорема 3. *Если семейство функций $\{u(x)\}$ принадлежит классу $\{S\Gamma\Gamma\}$ в области $D\subset\Pi_h$, равномерно ограничено сверху внутри D, то оно нормальное внутри D.*

Понятие нормального семейства и схема доказательства приведены в [4].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Разумовская Е.В., Тимофеев В.Г.* О функциях, полигармонических в слое // Математика. Механика: сб науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 101–104.

2. *Тимофеев В.Г.* Неравенства типа Ландау для функций нескольких переменных // Мат. заметки. 1985. Т. 37, № 5. С. 676–689.

3. *Привалов И.И.* Субгармонические функции. М.: Глав. ред. техн.-теорет. лит., 1937.

4. *Привалов И., Пчелин Б.* К общей теории полигармонических функций // Мат. сб. 1937. Т. 2(44), № 4. С. 745–758.

УДК 519. 83

В.В. Розен

УСЛОВИЯ ЕДИНСТВЕННОСТИ БАЛАНСОВОЙ ПАРЫ ВЕКТОРОВ

В работе [1] показано, что для конечной игры двух игроков с упорядоченными исходами нахождение ее ситуаций равновесия по Нэшу сводится к нахождению сбалансированных подматриц ее функции реализации и балансовых векторов этих подматриц. Здесь мы даем ответ на вопрос, при каких условиях сбалансированная матрица имеет единственную пару балансовых векторов. Основным результатом статьи является теорема 2. Введем вначале ряд определений и предварительных результатов, доказательства которых мы опускаем.

Матрица M формата $m \times n$ над конечным множеством A рассматривается как отображение $F\colon I \times J \to A$, где $I = \{1, \dots, m\}$, $J = \{1, \dots, n\}$ $(m, n \geq 2)$, причем $pr_2 F = A$. Обозначим через S_m^* и S_n^* стандартные симплексы m и n-мерных векторов с положительными компонентами. Для $x \in S_m^*, y \in S_n^*, a \in A$ полагаем

$$F_{(x,y)}(a) = \sum_{\substack{F(i,j)=a \\ (i,j) \in I \times J}} x_i \cdot y_j.$$

Определение. Матрица M называется *сбалансированной*, если существуют такие векторы $x \in S_m^*, y \in S_n^*$, что при любых $i \in I$, $j \in J$, $a \in A$ выполняется

$$F_{(i,y)}(a) = F_{(x,j)}(a).$$

При этом пара (x, y) называется *балансовой парой векторов* данной матрицы. Назовем вектор $x = (x_1, \dots, x_m) \in S_m^*$ *строчным балансовым*