БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Разумовская Е.В., Тимофеев В.Г.* О функциях, полигармонических в слое // Математика. Механика: сб науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 101–104.

2. *Тимофеев В.Г.* Неравенства типа Ландау для функций нескольких переменных // Мат. заметки. 1985. Т. 37, № 5. С. 676–689.

3. *Привалов И.И.* Субгармонические функции. М.: Глав. ред. техн.-теорет. лит., 1937.

4. *Привалов И., Пчелин Б.* К общей теории полигармонических функций // Мат. сб. 1937. Т. 2(44), № 4. С. 745–758.

УДК 519. 83

В.В. Розен

УСЛОВИЯ ЕДИНСТВЕННОСТИ БАЛАНСОВОЙ ПАРЫ ВЕКТОРОВ

В работе [1] показано, что для конечной игры двух игроков с упорядоченными исходами нахождение ее ситуаций равновесия по Нэшу сводится к нахождению сбалансированных подматриц ее функции реализации и балансовых векторов этих подматриц. Здесь мы даем ответ на вопрос, при каких условиях сбалансированная матрица имеет единственную пару балансовых векторов. Основным результатом статьи является теорема 2. Введем вначале ряд определений и предварительных результатов, доказательства которых мы опускаем.

Матрица M формата $m \times n$ над конечным множеством A рассматривается как отображение $F\colon I \times J \to A$, где $I = \{1, \dots, m\}$, $J = \{1, \dots, n\}$ $(m, n \geq 2)$, причем $pr_2 F = A$. Обозначим через S_m^* и S_n^* стандартные симплексы m и n-мерных векторов с положительными компонентами. Для $x \in S_m^*, y \in S_n^*, a \in A$ полагаем

$$F_{(x,y)}(a) = \sum_{\substack{F(i,j)=a \\ (i,j)\in I\times J}} x_i \cdot y_j.$$

Определение. Матрица M называется *сбалансированной*, если существуют такие векторы $x \in S_m^*, y \in S_n^*$, что при любых $i \in I$, $j \in J$, $a \in A$ выполняется

$$F_{(i,y)}(a) = F_{(x,j)}(a).$$

При этом пара (x, y) называется *балансовой парой векторов* данной матрицы. Назовем вектор $x = (x_1, \dots, x_m) \in S_m^*$ *строчным балансовым* *вектором* матрицы M, если при любом $a \in A$ для всех $j_1, j_2 \in J$ имеет место

$$F_{(x,j_1)}(a) = F_{(x,j_2)}(a).$$

Двойственно определяется столбцовый балансовый вектор.

Лемма 1. *Для того чтобы пара векторов $(x, y) \in S_m^* \times S_n^*$ была балансовой парой векторов матрицы M, необходимо и достаточно, чтобы x был ее строчным балансовым вектором, а y – столбцовым балансовым вектором.*

Напомним понятие сбалансированного покрытия. Пусть E – произвольное множество. Покрытие $(E_1, \ldots, E_k)$ множества E называется *сбалансированным* [2], если существует такой вектор с положительными компонентами $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, что для любого $e \in E$ имеет место

$$\sum_{e \in E_s} \lambda_s = 1.$$

При этом вектор λ называется *репрезентативным вектором* данного покрытия.

Лемма 2. *Сбалансированное покрытие $(E_1, \ldots, E_k)$ множества E имеет единственный репрезентативный вектор тогда и только тогда, когда система характеристических векторов $(\chi(E_1), \ldots, \chi(E_k))$ линейно независима.*

Рассмотрим при фиксированном $a \in A$ семейство множеств $(T_i^a)_{i \in I}$, где $T_i^a = \{j \in J \colon F(i, j) = a\}$.

Лемма 3. *Пусть $x = (x_1, \ldots, x_m) \in S_m^*$ – строчный балансовый вектор сбалансированной матрицы M. Положим для $i = 1, \ldots, m$*

$$\lambda_i^a = \frac{x_i}{\mu(a)},$$

где $\mu(a) = F_{(x,j_1)}(a) = \ldots = F_{(x,j_n)}(a)$. Тогда семейство подмножеств $(T_i^a)_{i \in I}$ образует сбалансированное покрытие множества J, причем вектор $\lambda^a = (\lambda_i^a)_{i \in I}$ является репрезентативным вектором этого покрытия.

Установим теперь следующий результат.

Теорема 1. *Для сбалансированной матрицы M над множеством A следующие условия эквивалентны:*

1. Матрица M имеет единственный строчный балансовый вектор;

2. При любом $a \in A$ система характеристических векторов $(\chi(T_1^a), \ldots, \chi(T_m^a))$ линейно независима;

3. При некотором $a^* \in A$ система характеристических векторов $(\chi(T_1^{a^*}), \ldots, \chi(T_m^{a^*}))$ линейно независима.

Доказательство

$1 \Rightarrow 2$. Зафиксируем $a \in A$. По лемме 3 система множеств $(T_1^a, \ldots, T_m^a)$ образует сбалансированное покрытие множества J. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ и $\lambda' = (\lambda_1', \ldots, \lambda_m')$ – репрезентативные векторы этого сбалансированного покрытия. Рассмотрим векторы $x = (x_1, \ldots, x_m)$ и $x' = (x_1', \ldots, x_m')$, где

$$x_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{s=1}^m \lambda_s}, \qquad x_i' = \frac{\lambda_i'}{\sum_{s=1}^m \lambda_s'}.$$

Непосредственно проверяется, что векторы x и x' являются строчными балансовыми векторами матрицы M. По условию 1 получаем $x = x'$, т.е. для всех $i \in I$

$$\frac{\lambda_i}{\sum_{s=1}^m \lambda_s} = \frac{\lambda_i'}{\sum_{s=1}^m \lambda_s'},$$

откуда $\lambda_i = k\lambda_i'$ ($i \in I$), где k – некоторая константа. Зафиксируем произвольно $j_0 \in J$. По определению сбалансированного покрытия имеем:

$$1 = \sum_{j_0 \in T_i^a} \lambda_i = \sum_{j_0 \in T_i^a} k\lambda_i' = k \sum_{j_0 \in T_i^a} \lambda_i' = k,$$

откуда $k = 1$ и $\lambda_i = \lambda_i'$. Таким образом, сбалансированное покрытие имеет единственный репрезентативный вектор, и по лемме 2 система характеристических векторов $(\chi(T_1^a), \ldots, \chi(T_m^a))$ линейно независима.

Импликация $2 \Rightarrow 3$ очевидна. Покажем импликацию $3 \Rightarrow 1$. Предположим, что при некотором $a^* \in A$ система характеристических векторов $(\chi(T_1^{a^*}), \ldots, \chi(T_m^{a^*}))$ линейно независима. Пусть $x' = (x_1', \ldots, x_m')$ и $x'' = (x_1'', \ldots, x_m'')$ – строчные балансовые векторы матрицы M. По лемме 3 векторы λ' и λ'', где

$$\lambda_i' = \frac{x_i'}{\mu(a^*)}, \qquad \lambda_i'' = \frac{x_i''}{\mu(a^*)},$$

являются репрезентативными векторами сбалансированного покрытия $(T_1^{a^*}, \ldots, T_m^{a^*})$. С учетом линейной независимости системы характеристических векторов по лемме 2 получаем $\lambda' = \lambda''$, откуда $x' = x''$.

Теорема доказана.

Из теоремы 1 и двойственного ей утверждения следует, что сбалансированная матрица, имеющая единственную пару балансовых векторов, должна быть квадратной. В самом деле, рассмотрим при некотором $a \in A$ матрицу $\chi(M^a) = (\delta^a_{ij})_{i \in I, j \in J}$, где

$$\delta^a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } F(i,j) = a, \\ 0, & \text{если } F(i,j) \neq a. \end{cases}$$

Строками матрицы $\chi(M^a)$ являются характеристические векторы $(\chi(T^a_1), \ldots, \chi(T^a_m))$. По теореме 1 эти векторы линейно независимы, откуда $m = r$, где $r = rang \chi(M^a)$. Двойственно выполняется $n = r$, откуда $m = n$. На основании леммы 1 и теоремы 1 имеем следующий основной результат.

Теорема 2. *Для сбалансированной матрицы M следующие условия эквивалентны между собой:*

1) Матрица M имеет единственную пару балансовых векторов;

2) Матрица M является квадратной и $Det(\chi(M^a)) \neq 0$ при любом $a \in A$;

3) Матрица M является квадратной и $Det(\chi(M^{a^*})) \neq 0$ при некотором $a^* \in A$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Розен В.В., Панкратова Ю.Н.* Ситуации равновесия и сбалансированные покрытия в играх с упорядоченными исходами // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 105–108.
2. *Экланд И.* Элементы математической экономики. М.: Мир, 1983.

УДК [514.133+514.174.5]

Л.Н. Ромакина

АНАЛОГ МОЗАИКИ НА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Гиперболическую плоскость $\hat{H}$ положительной кривизны определим [1] как область проективной плоскости P_2, внешнюю относительно некоторой овальной линии γ, называемой *абсолютом.* Внутренняя область относительно абсолюта, как известно, является полной плоскостью Лобачевского. Геометрия плоскости $\hat{H}$ положительной кривизны $1/\rho^2$ может быть также реализована в псевдоевклидовом пространстве R^3_1 на сфере действительного радиуса ρ с отождествленными диаметрально противоположными точками.

Отличием плоскости $\hat{H}$ от плоскостей постоянной кривизны в смысле [2] (евклидовой R^2, сферической S^2 и Лобачевского Λ^2) является