то система корневых функций пучка (1), (2) m-кратно полна в $L_2[0,1]$ при $m \leq n-l$ с возможным конечным дефектом, не превышающим числа $\sum\limits_{i=l+1}^{n}[m-1-\varkappa_i]_+$.

Теорема точна в следующем смысле. В [1, с. 58–62] сформулирована теорема об $(n-l+1)$-кратной неполноте системы корневых функций частного случая пучка вида (1), (2), краевые условия которых являются полураспадающимися и не зависят от параметра λ. Но доказательство этой теоремы, по мнению автора, настоящей статьи недостаточно убедительно. В [2] при $l = n-1$ и $m = n-l+1 (= 2)$ получены достаточные условия на корни $\{\omega_j\}_1^n$, при которых системы корневых функций пучков вида (1), (2) m-кратно неполны в $L_2[0,1]$ и имеют бесконечный дефект.

В случае $l = 1$ из теоремы 1 получаем $(n-1)$-кратную полноту корневых функций в $L_2[0,1]$. Что же касается n-кратной полноты, то справедлив следующий результат.

Теорема 2. *Если выполняется условие (3), $l = 1$ и $a_{11} \neq 0$, то система корневых функций пучка (1), (2) n-кратно неполна в $L_2[0,1]$ с бесконечным дефектом.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270) и гранта Президента РФ (проект НШ-4383.2010.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Вагабов А.И.* Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1994. 160 с.

2. *Рыхлов В.С.* О кратной неполноте собственных функций пучков обыкновенных диференциальных операторов // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 114–117.

УДК 519.83

Т.Ф. Савина

РАВНОВЕСНЫЕ И ДОПУСТИМЫЕ ИСХОДЫ ДЛЯ КОАЛИЦИЙ В ИГРЕ С ОТНОШЕНИЯМИ ПРЕДПОЧТЕНИЯ

Вопрос о сохранении оптимальных решений при переходе от одной игры с отношениями предпочтения к другой с помощью гомоморфизма был рассмотрен в работе [1]. В настоящей статье изучается переход к кооперативному аспекту игры, который связан с образованием в игре коалиций игроков. Вводятся соответствующие принципы оптимальности для игр такого типа и условия связи между оптимальными кооперативными решениями игр, находящихся в отношении гомоморфности.

Для игры игроков $N = \{1, \ldots, n\}$ с отношениями предпочтения $G = \langle (X_i)_{i \in N}, A, (\rho_i)_{i \in N}, F \rangle$ под коалицией понимается произвольное непустое подмножество $T \subseteq N$. Определим множество стратегий коалиции T в виде

$$X_T = \prod_{i \in T} X_i.$$

Отношение предпочтения коалиции T строится из отношений предпочтения входящих в нее членов. При этом в качестве минимального требования для предпочтения коалиции принимается условие

$$a_1 \overset{\rho_T}{\lesssim} a_2 \;\Rightarrow\; (\forall i \in T)\, a_1 \overset{\rho_T}{\lesssim} a_2. \tag{1}$$

В данной статье рассматриваются три типа определения предпочтения коалиций, удовлетворяющие условию (1).

1. Парето-согласование предпочтений игроков

$$a_1 \overset{\rho_T}{\lesssim} a_2 \;\Leftrightarrow\; (\forall i \in T)\, a_1 \overset{\rho_i}{\lesssim} a_2.$$

Замечание. *При этом симметричная часть отношения предпочтения для коалиции T имеет вид*

$$a_1 \overset{\rho_T}{\sim} a_2 \;\Leftrightarrow\; (\forall i \in T)\, a_1 \overset{\rho_i}{\sim} a_2,$$

а строгая часть определена равносильностью:

$$a_1 \overset{\rho_T}{<} a_2 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} (\forall i \in T)\, a_1 \overset{\rho_i}{\lesssim} a_2, \\ (\exists j \in T)\, a_1 \overset{\rho_j}{<} a_2. \end{cases}$$

2. Модифицированное парето-согласование предпочтений

В этом случае строгая часть имеет вид

$$a_1 \overset{\rho_T}{<} a_2 \;\Leftrightarrow\; (\forall i \in T)\, a_1 \overset{\rho_i}{<} a_2,$$

а симметричная часть

$$a_1 \overset{\rho_T}{\sim} a_2 \;\Leftrightarrow\; (\forall i \in T)\, a_1 \overset{\rho_i}{\sim} a_2.$$

3. Правило большинства

$$a_1 \overset{\rho_T}{<} a_2 \Leftrightarrow \left|\left\{i \in T : a_1 \overset{\rho_i}{<} a_2\right\}\right| > \left|\frac{T}{2}\right|.$$

Пример. Пусть в игре G трех игроков множество исходов $A = \{a, b, c, d\}$. Отношения предпочтения для каждого игрока заданы следующим образом:

$$\rho_1 \colon a \overset{\rho_1}{<} b, b \overset{\rho_1}{\sim} c, c \overset{\rho_1}{\sim} d,$$

$$\rho_2 \colon a \overset{\rho_2}{\sim} b, b \overset{\rho_2}{\sim} c, c \overset{\rho_2}{<} d,$$

$$\rho_3 \colon a \overset{\rho_3}{<} c, b \overset{\rho_3}{\sim} c, a \overset{\rho_3}{<} d.$$

Тогда парето-согласование предпочтений для коалиции $T = \{1, 2\}$ имеет вид

$$\rho_T \colon a \overset{\rho_T}{\lesssim} b, b \overset{\rho_T}{\lesssim} c, c \overset{\rho_T}{\lesssim} d,$$

причем строгая часть есть $a \overset{\rho_T}{<} b, c \overset{\rho_T}{<} d$, а симметричная – $b \overset{\rho_T}{\sim} c$.

Модифицированное парето-согласование предпочтений для коалиции $T = \{1, 2\}$ имеет вид: строгая часть есть пустое множество, симметричная часть $b \overset{\rho_T}{\sim} c$.

Для коалиции, состоящей из всех игроков, т.е. для $T = \{1, 2, 3\}$, парето-согласование предпочтений есть $b \overset{\rho_T}{\sim} c$.

По правилу большинства отношение предпочтения для $T = \{1, 2, 3\}$ примет вид

$$a \overset{\rho_T}{\lesssim} b, b \overset{\rho_T}{\sim} c, c \overset{\rho_T}{\lesssim} d.$$

Замечание. *Пусть* $\{T_1, \ldots, T_m\}$ *– разбиение множества* N*. Тогда набор стратегий этих коалиций* $(x_{T_1}, \ldots, x_{T_m})$ *определяет единственным образом ситуацию* $x \in X$ *в игре* G*. Ситуация* x *характеризуется условием, что проекция ситуации* x *на* $T_k\,(k = 1, \ldots, m)$ *совпадает с* x_{T_k}*. Поэтому можно доопределить функцию реализации правилом:* $F\left(x_{T_1}, \ldots, x_{T_m}\right) \overset{df}{=} F\left(x\right)$*. В частности, если* T *— фиксированная коалиция, то определен исход* $F\left(x_T, x_{N/T}\right)$*.*

Гомоморфизм одной игры в другую естественным образом продолжается до гомоморфизма стратегий коалиций.

Рассмотрим следующие кооперативные принципы оптимальности для игры G: принцип $\mathcal{K}$-равновесия и принцип $\mathcal{K}$-допустимости.

Пусть $\mathcal{K}$ — произвольное семейство коалиций, $\mathcal{K} \subseteq 2^N$.

Определение 1. Стратегия $x_T^0 \in X_T$ называется *возражением* коалиции T *на исход* a, если для любой стратегии дополнительной коалиции $x_{N/T} \in X_{N/T}$ выполняется $F\left(x_T^0, x_{N/T}\right) \overset{\rho_T}{>} a$.

Исход a называется *допустимым* для коалиции T, если у нее не существует возражений на этот исход. Исход a называется допустимым для семейства коалиций $\mathcal{K} \subseteq 2^N$ (короче, *$\mathcal{K}$-допустимым*), если он допустим для всех коалиций этого семейства.

Определение 2. Стратегия $x_T^0 \in X_T$ называется *возражением* коалиции T *на ситуацию* $x^* \in X$, если она является возражением на исход $F(x^*)$.

Определение 3. Стратегия $x_T^0 \in X_T$ называется *опровержением ситуации* $x \in X$ со стороны коалиции T, если $F\left(x_T^0, x_{N/T}\right) \overset{\rho_T}{>} F(x)$.

Ситуация $\left(x_i^0\right)_{i \in N} = x^0 \in X$ называется *ситуацией $\mathcal{K}$-равновесия*, если у любой коалиции $T \in \mathcal{K}$ не существует опровержений этой ситуации.

Ситуация $\mathcal{K}$-равновесия для всех одноэлементных коалиций есть в точности ситуация общего равновесия в игре G [1]. Ситуация $\mathcal{K}$-равновесия для коалиции всех игроков есть в точности оптимальная, по Парето, ситуация.

Пусть, кроме игры G, задана еще одна игра с отношениями предпочтения тех же игроков $\Gamma = \langle (U_i)_{i \in N}, B, (\sigma_i)_{i \in N}, \Phi \rangle$ и пусть $f = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi)$ – гомоморфизм из игры G в игру Γ. Имеют место следующие результаты.

Теорема 1. *Если в качестве принципов оптимальности для игр G и Γ рассматривать принцип $\mathcal{K}$-допустимости при парето-согласовании предпочтений, то строгий гомоморфизм [2] «на» будет контравариантным.*

Теорема 2. *Если в качестве принципов оптимальности для игр G и Γ рассматривать принцип $\mathcal{K}$-допустимости при парето-согласовании предпочтений, то регулярный гомоморфизм «на» будет ковариантным.*

Теорема 3. *Если в качестве принципов оптимальности для игр G и Γ рассматривать принцип $\mathcal{K}$-равновесия при модифицированном парето-согласовании, то строгий гомоморфизм «на» будет контравариантным.*

Теорема 4. *Если в качестве принципов оптимальности для игр G и Γ рассматривать принцип $\mathcal{K}$-равновесия при модифицированном парето-согласовании, то регулярный гомоморфизм «на» будет ковариантным.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Савина Т.Ф.* Ковариантные и контравариантные гомоморфизмы игр с отношениями предпочтения // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 9, вып. 3. С. 66–70.

2. *Савина Т.Ф.* Гомоморфизмы игр с отношениями предпочтения // Дискретная математика и ее приложения: материалы X Междунар. семинара, Москва, 1–6 февр. 2010 г. М.: Изд-во мех.-мат. фак. Моск. ун-та, 2010. С. 426–428.

УДК 517.518.85

С.П. Сидоров

ОЦЕНКА ЛИНЕЙНОГО ФОРМОСОХРАНЯЮЩЕГО ПОПЕРЕЧНИКА ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Найдена оценка линейного относительного поперечника одного класса дифференцируемых функций.

Пусть $C^k[0,1]$, $k \geqslant 0$, есть пространство действительнозначных и k раз непрерывно дифференцируемых функций на $[0,1]$, D^i означает оператор дифференцирования i-го порядка, $\sigma = (\sigma_i)_{i\geqslant 0}$ — последовательность с $\sigma_i \in \{-1,0,1\}$ и h, k — два целых числа таких, что $0 \leqslant h < k$ и $\sigma_h \cdot \sigma_k \neq 0$.

Следуя [1], в работе рассматриваются конуса функций $C_{h,k}(\sigma)$, производные некоторых порядков которых имеют фиксированный знак на $[0,1]$:

$$C_{h,k}(\sigma) := \{f \in C^k[0,1] \ : \quad \sigma_i \cdot D^i f \geqslant 0, \quad i = h, \dots, k\}.$$

Обозначим $\sigma^{[r]} = (\sigma_i^{[r]})_{i=0}^k$, $\sigma_r^{[r]} = \sigma_r$ и $\sigma_i^{[r]} = 0$, если $i \neq r$.

Обозначим Π_k подпространство $C[0,1]$, порожденное системой функций $\{e_0, e_1, \dots, e_k\}$, где $e_i(t) = t^i$, $P_k = \{p \in \Pi_k : \ \|D^k p\|_{C[0,1]} \leq 1\}$.

Пусть V есть некоторый конус в $C[0,1]$. Определим линейный относительный n-поперечник множества $A \subset C^k[0,1]$ в $C[0,1]$ для D^r с ограничением V следующим образом:

$$\delta_n^r(A,V)_{C[0,1]} := \inf_{\mathcal{L}_n(V)} \ \sup_{f \in A} \ \|D^r f - D^r L_n f\|_{C[0,1]},$$

где $\mathcal{L}_n(V)$ есть множество всех линейных операторов $L_n : C^k[0,1] \to$ $\to C^r[0,1]$ конечного ранга $\leq n$ таких, что $L_n(V) \subset V$.

В следующей теореме находится линейный относительный n-поперечник множества P_k в $C[0,1]$ для D^r с ограничением $C_{h,k}(\sigma)$.

Теорема. *Пусть* $C_{h,k}(\sigma)$ *— конус такой, что* $\Gamma = \{i : \ h \leqslant i < k, \ \sigma_i \neq 0, \ \sigma_{i+1} = 0, \ \sigma_i \cdot \sigma_{i+2} \neq -1\} \neq \varnothing$ *и пусть* $r \in \Gamma$. *Тогда*

$$\delta_n^r\left(P_k, C_{h,k}(\sigma)\right)_{C[0,1]} \asymp \frac{1}{n^{k-r}}.$$