БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Muñoz-Delgado F.J., Ramírez-González V., Cárdenas-Morales"D.* Qualitative Korovkin-type results on conservative approximation // J. Approx. Theory. 1998. Vol. 94. P. 144–159.

2. *Sidorov S.P.* Optimal Approximation of the rth differential operator by means of linear shape preserving opeartors of finite rank // J. of Approx. Theory. 2003. Vol. 124. P. 232–241.

УДК 517.51

В.Г. Тимофеев

ТОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ЛАНДАУ ДЛЯ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть $C = C(R^n)$, $n \geq 2$, — пространство непрерывных ограниченных на R^n функций с обычно определенной нормой

$$\|u\|_C = \sup\{|u(x)| : x \in R^n\};$$

$L_\infty = L_\infty(R^n)$ — пространство измеримых существенно ограниченных функций с нормой

$$\|u\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}\{|u(x)| : x \in R^n\}.$$

Обозначим через U класс функций $u \in C$, для которых значение оператора Лапласа принадлежит $L_\infty(R^n)$ и понимается в обобщенном, по Соболеву, смысле.

Начнем изложение основных результатов с нескольких вспомогательных утверждений, необходимых в дальнейшем. Приведем интегральное представление производной u'_{x_i} функции $u \in U$. Для всех x и ξ таких, что $\xi_1 \neq \neq x_1 + 2kh$, $k \in Z$, $h > 0$, полагаем

$$G(\xi, x) = \begin{cases} \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \ln \frac{1}{r_k} - \ln \frac{1}{\rho_k} \right\}, & \text{если } \ n = 2, \\ \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{r_k^{n-2}} - \frac{1}{\rho_k^{n-2}} \right\}, & \text{если } \ n \geq 3, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$r_k = \sqrt{(\xi_1 - x_1 - 4kh)^2 + \sum_{i=2}^{n} (\xi_i - x_i)^2},$$

$$\rho_k = \sqrt{(\xi_1 + x_1 - 4kh - 2h)^2 + \sum_{i=2}^{n} (\xi_i - x_i)^2}.$$

Выделим в R^n слой

$$\Pi_h = \{\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in R^n : -h < \xi_1 < h,\ -\infty < \xi_i < \infty,\ i = \overline{2,n}\},$$

$h > 0$.

Лемма 1. *Функция (1) является функцией Грина слоя Π_h, а для производной любой функции $u \in U$ имеет место следующее интегральное представление:*

$$u'_{x_i} = -\frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(n-2)} \int\limits_{\partial\Pi_h} u(\xi) \frac{\partial^2 G(\xi,x)}{\partial x_i\, \partial n_\xi}\, d\xi - \frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(n-2)} \int\limits_{\Pi_h} \Delta u(\xi) \frac{\partial G(\xi,x)}{\partial x_i}\, d\xi, \qquad (2)$$

$x \in \Pi_h$, $i = \overline{1,n}$; $\frac{\partial G(\xi,x)}{\partial n_\xi}$ — производная по направлению внешней нормали к границе $\partial\Pi_h$ области Π_h.

Доказательство леммы для $i = 1$ приведено в статье [1].

Воспользуемся представлением (2) для вычисления знаков производных $\frac{\partial G(\xi,x)}{\partial x_i}$ и $\left.\frac{\partial^2 G(\xi,x)}{\partial x_i\, \partial n_\xi}\right|_{\partial\Pi_h}$ при фиксированном $x \in \Pi_h$. Для определенности положим $i = 1$.

Лемма 2. *Пусть x фиксировано внутри слоя Π_h, а $\xi \neq x$. Если $-h \leq \xi_1 \leq x_1$, то $\frac{\partial G}{\partial x_1} \leq 0$, а если $x_1 \leq \xi_1 \leq h$, то $\frac{\partial G}{\partial x_1} \geq 0$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\Phi(\xi) = \frac{\partial G(\xi,x)}{\partial x_1} = (\xi_1 - x_1) \left\{ \frac{k}{r_0^n} + \frac{H(\xi)}{\xi_1 - x_1} \right\}, \qquad (3)$$

где $k = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 2, \\ n-2, & \text{если } n \geq 3. \end{cases}$

Без особого труда [2] устанавливается, что $\left| \frac{H(\xi)}{\xi_1 - x_1} \right| \leq C_0$, где C_0 — константа. Пусть $\xi_1 \in [x_1, h]$. Из (3) следует, что $\Phi(\xi) \geq (\xi_1 - x_1) \left\{ \frac{k}{r_0^n} - C_0 \right\}$ и если $|r_0| \leq \left(\frac{k}{C_0} \right)^{1/n}$, то $\operatorname{sgn} \Phi(\xi) = \operatorname{sgn}(\xi_1 - x_1)$. Поскольку

$$\Phi(\xi)|_{\xi_1 = x_1} = \Phi(\xi)|_{\xi_1 = +h} = 0 \qquad (4)$$

и $\Phi(\xi)$ экспоненциально убывает к нулю при $\xi \to \infty$, то, взяв $\varepsilon > 0$ так, что $\varepsilon < \left(\frac{k}{C_0} \right)^{1/n}$ и рассмотрев множество $\Pi^+_{\varepsilon,h} = \{\xi \in \Pi_h : r_0 \geq \varepsilon,\ \xi_1 - x_1 \geq 0\}$, получим, что в этом множестве $\Phi(\xi) \geq 0$.

Функция $\Phi(\xi)$ гармоническая по ξ в $\Pi^{+}_{\varepsilon,h}$. Тогда в силу принципа максимума для гармонических в неограниченных областях функций имеем

$$\Phi(\xi) \geq 0. \tag{5}$$

Для случая $\xi_1 \in [-h, x_1]$ доказательство аналогично.

Лемма 3. *Если* $\xi_1 = -h$, *то* $\frac{\partial^2 G(\xi,x)}{\partial x_1 \, \partial n_\xi} \geq 0$, *если* $\xi_1 = h$, *то* $\frac{\partial^2 G(\xi,x)}{\partial x_1 \, \partial n_\xi} \leq 0$.

Доказательство. Из (4) и (5) следует, что $\left.\frac{\partial \Phi(\xi)}{\partial \xi_1}\right|_{\xi_1=h} = \left.\frac{\partial^2 G(\xi,x)}{\partial \xi_1 \, \partial x_1}\right|_{\xi_1=h} \leq 0$, а поскольку всюду в $\Pi_h \setminus \{x\}$ $\frac{\partial^2 G(\xi,x)}{\partial \xi_1 \, \partial x_1} = \frac{\partial^2 G(\xi,x)}{\partial x_1 \, \partial \xi_1}$ и, значит, $\left.\frac{\partial^2 G(\xi,x)}{\partial x_1 \, \partial n_\xi}\right|_{\xi_1=h} = \left.= \frac{\partial^2 G(\xi,x)}{\partial x_1 \, \partial \xi_1}\right|_{\xi_1=h} \leq 0$.

Второй случай доказывается так же.

Теорема. *Функции* $u \in U$: $\|u\|_C \leq \delta$, $\|\Delta u\|_\infty \leq \eta$, $\delta, \eta > 0$ *удовлетворяют следующим точным неравенствам:*

$$\|u'_{x_i}\|_C \leq \tfrac{1}{h}\|u\|_C + h\|\Delta u\|_\infty, \quad \textit{если} \quad h < \sqrt{\tfrac{\delta}{\eta}}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{6}$$

$$\|u'_{x_i}\|_C \leq 2\sqrt{\|u\|_C \|\Delta u\|_\infty}, \quad \textit{если} \quad h \geq \sqrt{\tfrac{\delta}{\eta}}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{7}$$

Доказательство. Из (2) вытекает, что

$$|u'_{x_i}(x)| \leq J_1 \|u\|_C + J_2 \|\Delta u\|_\infty, \tag{8}$$

где

$$J_1 = \frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(n-2)} \int\limits_{\partial \Pi_h} \left| \frac{\partial^2 G(\xi,x)}{\partial x_i \, \partial n_\xi} \right| d\xi, \tag{9}$$

$$J_2 = \frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(n-2)} \int\limits_{\Pi_h} \left| \frac{\partial G(\xi,x)}{\partial x_i} \right| d\xi. \tag{10}$$

Величины (9) и (10) могут быть получены как решение соответствующих задач Дирихле: $\Delta v = 0$, $v|_{\partial \Pi_h} = \mathrm{sgn}(\xi_1 - x_1)$ и $\Delta v = -\mathrm{sgn}(\xi_1 - x_1)$, $v|_{\partial \Pi_h} = 0$, где $v \in U$.

Минимизируя полученное соотношение (8) по h, получаем оценки (6) и (7). Точность неравенств проверяется на одномерных функциях [3].

Следствие. *Пусть* $\omega_h(\delta,\eta) = \sup\{\|u'_{x_i}\|_C : u \in U, \|u\|_C \leq \delta, \|\Delta u\| \leq \eta\}$, $\delta, \eta > 0$, $i = \overline{1,n}$, *тогда* $\omega_h(\delta,\eta) = \begin{cases} \frac{\delta}{h} + h\eta, & \textit{если } h < \sqrt{\frac{\delta}{\eta}}, \\ 2\sqrt{\delta\eta}, & \textit{если } h \geq \sqrt{\frac{\delta}{\eta}}. \end{cases}$

Замечания

1. Приведенные результаты для случая всего пространства R^n были получены автором в [1].

2. Историю одномерных задач можно найти в [1–6].

3. Поскольку нормы оператора свёртки из L_∞ в L_∞ и из L_1 в L_1 совпадают, то полученные результаты остаются верны и для $L_1(R^n)$. Точность неравенств в этом случае можно доказать по аналогии с [1].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Тимофеев В.Г.* Неравенства типа Ландау для функций нескольких переменных // Мат. заметки. 1985. Т. 37, № 5. С. 676–689.

2. *Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н.* Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1972.

3. *Харди Г.Г., Литтлвуд Д.Е., Полиа Г.* Неравенства. М.: Наука, 1948.

4. *Тимофеев В.Г.* Неравенства типа Колмогорова с оператором Лапласа // Теория функций и приближений: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1983. С. 84–92.

5. *Стечкин С.Б.* Наилучшее приближение линейных операторов // Мат. заметки. 1967. Т. 1, вып. 2. С. 137–148.

6. *Арестов В.В.* О равномерной регуляризации задачи вычисления значений оператора // Мат. заметки. 1977. Т. 22, № 2. С. 231–244.

УДК 517.518.85

А.Ю. Трынин, И.С. Панфилова

ОБ ОДНОМ ПРИЗНАКЕ ТИПА ДИНИ—ЛИПШИЦА СХОДИМОСТИ ОБОБЩЁННЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ УИТТЕКЕРА—КОТЕЛЬНИКОВА—ШЕННОНА

В статье изучаются аппроксимативные свойства операторов интерполирования лагранжева типа, представляющих собой некоторое обобщение усечённых кардинальных функций Уиттекера и классических интерполяционных многочленов. Полученные результаты являются продолжением исследований, опубликованных в статьях [1–3].

Будем обозначать $C_0[0,\pi] = \{f : f \in C[0,\pi],\ f(0) = f(\pi) = 0\}$. В предположении $\rho_\lambda \geq 0$ при каждом неотрицательном λ считаем, что

$$V_{\rho_\lambda}[0,\pi] = \{q_\lambda : V_0^\pi[q_\lambda] \leq \rho_\lambda, q_\lambda(0) = 0\}, \quad \rho_\lambda = o(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln\lambda}), \text{ при } \lambda \to \infty. \tag{1}$$

Тогда для любого потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ при $\lambda \to +\infty$ после его доопределения на всю ось $\mathbf{R}$ с сохранением вариации через $x_{k,\lambda}, k \in \mathbf{Z}$, будем обозначать нули обобщённого решения задачи Коши

$$y'' + (\lambda - q_\lambda(x))y = 0, \quad y(0,\lambda) = 1, \quad y'(0,\lambda) = h(\lambda), \tag{2}$$