следует (15). А для операторов вида (5), построенных с помощью решений задачи Коши (3), из соотношения

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\sqrt{\lambda}y(x,\lambda)\hat{\Omega}(f,x,\lambda,\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}})}{h(\lambda)}\max\Big\{1,\Big(\ln\lambda-\frac{1}{\sqrt{\omega(f,\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}})}}\Big)\Big\}=0$$

следует (15), где «относительный» модуль непрерывности $\hat{\Omega}$ *определяется (8).*

Доказательство. Справедливость утверждения теоремы 3 устанавливается аналогично доказательству теоремы 2 в случае $\vartheta(\lambda)=\sqrt{\omega(f,\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}})}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Трынин А.Ю.* Обобщение теоремы отсчетов Уиттекера—Котельникова—Шеннона для непрерывных функций на отрезке // Мат. сб. 2009. Т. 200, вып. 11. С. 61—108.

2. *Трынин А.Ю.* Оценки функций Лебега и формула Неваи для sinc-приближений непрерывных функций на отрезке // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1158–1169.

3. *Трынин А.Ю.* Критерии поточечной и равномерной сходимости синк-приближений непрерывных функций на отрезке // Мат. сб. 2007. Т. 198, вып. 10. С. 141–158.

УДК 517.518.85

А.Ю. Трынин, И.С. Панфилова

О РАСХОДИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ ЛАГРАНЖА ПО УЗЛАМ ЯКОБИ НА МНОЖЕСТВЕ ПОЛНОЙ МЕРЫ

В настоящей работе получено усиление результата А.А. Привалова [1, теорема 1]. Показано существование непрерывной функции, интерполяционные процессы Лагранжа—Якоби которой расходятся почти всюду на [-1; 1].

Пусть $R=\{x_{k,n}\}, k=1,2,3,...,n;\ n=1,2,3,...,$ — матрица узлов интерполирования, n-я строка которой

$$-1<x_{n,n}<x_{n-1,n}<x_{n-2,n}<...<x_{1,n}<1$$

есть корни многочлена Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, т.е. многочленов $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}$, ортогональных на отрезке [-1; 1] с дифференциальным весом $\omega(x)=$ $=(1-x)^\alpha\cdot(1+x)^\beta$, $\alpha>-1,\beta>-1$.

Для любой непрерывной на [-1; 1] функции $f(x)$ положим

$$L_n(R,f,x)=\sum_{k=1}^{n} f(x_{k,n}) l_{k,n}(R,x),$$

где $l_{k,n}(R,x)=P_n^{(\alpha,\beta)}(x)/P_n^{(\alpha,\beta)'}(x_{k,n})\cdot(x-x_{k,n})$.

Лемма 1. *Пусть $R=\{x_{k,n}\}$ – матрица узлов интерполирования Якоби и пусть ε_l – наперед заданная последовательность положительных чисел $0<\varepsilon_l<1$, $l=1,2,3,\ldots$. Тогда найдутся положительные постоянные $c_{1,l}$ и $c_{2,l}$, не зависящие от n, такие, что для любых узлов $x_{k,n}$ и $x_{k+1,n}\in[-1+\varepsilon_l,1-\varepsilon_l]$ справедливы неравенства*

$$c_{1,l}/n<x_{k,n}-x_{k+1,n}<c_{2,l}/n. \tag{1}$$

Доказательство см. в [1, следствие к лемме 2].

Лемма 2. *Пусть $R=\{x_{k,n}\}$ – матрица узлов Якоби, $\gamma_1= =min(\alpha,\beta)>-1$ и пусть положительные числа ε_l и q такие, что* $0<\varepsilon_l<1, q>2$.

Тогда существуют положительные постоянные $c_{l0}=c(\varepsilon_l,q)$, зависящие только от ε_l и q и не зависящие от n, такие, что для всех $x=\cos\theta, x\in I_n(q,\varepsilon_l)$,

$$I_n(q,\varepsilon_l)=\Big(\bigcup_{k=1}^{n-1}\Big[x_{k+1,n}+\frac{x_{k,n}-x_{k+1,n}}{q};x_{k,n}-\frac{x_{k,n}-x_{k+1,n}}{q}\Big]\Big)\bigcap[-1+\varepsilon_l;1-\varepsilon_l] \tag{2}$$

и всех номеров n, $n\geq n_{l0}$, где n_{l0} зависит только от ε_l, α и β, справедливы неравенства

$$|\cos(N\arccos x+\gamma)+O(1)(n\sqrt{1-x^2})^{-1}|\geq c_{l0},$$

где $N=n+(\alpha+\beta+1)/2, \gamma=-(\alpha+1/2)\pi/2$.

Доказательство см. в [1, лемма 7].

Лемма 3. *Пусть множества E_1, E_2, E_3, ... измеримы. Если $E_1\subset \subset E_2\subset E_3\subset\ldots$ и если сумма $E=\sum_{k=1}^{\infty}E_k$ ограничена, то $mesE= =\lim_{n\to\infty}(mesE_n)$* [2].

Доказательство см. [3, гл.3, §4, теорема 11].

Теорема 1. *Пусть вещественные α и β такие, что $\gamma_1= =min(\alpha,\beta)>-1$, и пусть R – матрица узлов интерполирования, n-я строка которой есть нули многочлена $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ Якоби, $n=1,2,3,\ldots$ Тогда для любого положительного числа ε, $0<\varepsilon<1$, существуют* *множество E, $E \subset [-1;1]$, $mesE > 2-\varepsilon$, и непрерывная на $[-1;1]$ функция $f(x)$ такие, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,|L_n(R,f,x)| = \infty$, если только $x \in E$.*

Доказательство см. [1, теорема 1].

Теорема 2. *Пусть вещественные α и β такие, что $\gamma_1 = min(\alpha,\beta) > -1$, и пусть R – матрица узлов интерполирования, n-я строка которой есть нули многочлена $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ Якоби, $n = 1,2,3,...$ Тогда существует непрерывная на $[-1;1]$ функция $f(x)$, для которой $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,|L_n(R,f,x)| = \infty$ почти везде на $[-1;1]$.*

Доказательство. В силу [1, лемма 11] для последовательности положительных чисел ε_l, $0 < \varepsilon_l < 1/4$, существует бесконечная последовательность $\{n_s\}$ номеров такая, что $n_1 < n_2 < n_3 < ...$, и если $n_{s_i} \neq n_{s_j}$, то многочлены $P_{n_{s_i}}^{(\alpha,\beta)}(x)$ и $P_{n_{s_j}}^{(\alpha,\beta)}(x)$ на отрезке $[-1+\varepsilon_l; 1-\varepsilon_l]$ имеют не более одного общего нуля; кроме того, в силу [1, лемма 3] считаем, что $L_{n_1}(R) \le L_{n_2}(R) \le L_{n_3}(R) \le ...$.

Возьмем бесконечную последовательность $\{m_s\}$ натуральных чисел такую, что $m_1 > 6/\varepsilon_l$ и ряд $\sum\limits_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln m_s}}$ сходится, и будем искать функцию, удовлетворяющую теореме, в виде (см. [1, (59)])

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\psi_j(x)}{\sqrt{\ln m_{s_j}}}. \tag{3}$$

Так же как в [1, теорема 1], только на каждом шаге заменяя ε на ε_l, построим две числовые последовательности $\{m_{s_j}\}$ и $\{n_{s_j+i-1}\}, i = 1,2,3,...,m_{s_j}; j = 1,2,3,...$, последовательность промежутков $\{\Delta_{i,m_{s_j}}\}$, $i = 1,2,3,...,m_{s_j}; j = 1,2,3,...;$ две последовательности $\{\psi_j(x)\}, j = 1,2,3,...,$ и $\{\varphi_{i,j}(x)\}, i = 1,2,3,...,m_{s_j}; j = 1,2,3,...,$ функций, непрерывных на [-1;1]. Эти последовательности обладают следующими свойствами:

1) функция $\psi_j(x) \in Lip_{M_j}1$ на отрезке [-1; 1] и $\max\limits_{-1\le x\le 1} |\psi_j(x)| = 1$;

2) $L_{n_{s_l+m_l-1}}(R) \cdot \sum\limits_{i=l+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln m_{s_j}}} \le c_{12}, l = 1,2,3,...;$

3) $\max\limits_{-1+\varepsilon_l \le x \le 1-\varepsilon_l} |L_n(R,\psi_j,x) - \psi_j(x)| \le c_{12}$, $n \ge n_{s_l}, j = 1,2,3,...,l-1;$

4) если $x \in \Delta_{i+1,m_l} \cap [-1+\varepsilon_l; 1-\varepsilon_l], i \in [1; m_{s_l}-1]$, то

$$|L_{n_{s_l+i-1}}(R,\psi_l,x)| = |L_{n_{s_l+i-1}}(R,\varphi_{i,l},x)| \ge c_{3,l}\cos|(N_{s_l+i-1}\cdot \arccos x + \gamma)+$$
$$+O(1)(n_{s_l+i-1}\sqrt{1-x^2})^{-1}| \times (\ln m_l - c_6) \ge \cos|(N_{s_l+i-1}\cdot \arccos x + \gamma)+$$
$$+O(1)(n_{s_l+i-1}\sqrt{1-x^2})^{-1}| \times ((\ln m_l)^{\frac{3}{4}} - c_6); \tag{4}$$

5) для любого $l = 1, 2, 3, ...$ справедливы соотношения

$$\bigcup_{i=1}^{m_{s_l-1}} \Delta_{i+1,m_{s_l}} = [-1 + 2/m_{s_l}; 1 - 2/m_{s_l}] \supset [-1 + \varepsilon_l; 1 - \varepsilon_l], \qquad (5)$$

где $\Delta_{i+1,m_{s_l}} \cap \Delta_{j+1,m_{s_l}} = \varnothing$, если $1 \le i \ne j \le m_{s_l} - 1$;

6) функция $f(x) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{\psi_j(x)}{\sqrt{\ln m_{s_j}}}$ непрерывна на отрезке [-1;1].

Строим множество E. В силу леммы 1 существуют положительные постоянные $c_{1,l}$ и $c_{2,l}$, не зависящие от n, такие, что если узлы $x_{k,n}$ и $x_{k+1,n}$ матрицы R принадлежат отрезкам $[-1+\varepsilon_l/2; 1-\varepsilon_l/2]$, то $c_{1,l}/n < |x_{k,n} - x_{k+1,n}| < c_{2,l}/n$.

Возьмем положительное число $q > 4c_{2,l}/c_{1,l}\varepsilon_l$ и рассмотрим множества $I_{n_{s_l+i-1}}(q, \varepsilon_l)$ из леммы 2, где $l = 1, 2, 3, ...$ и индекс i изменяется от номера μ_l до номера ν_l, которые определяются из неравенств

$$2(\mu_l - 1)/m_{s_l} \le -1 + \varepsilon_l < 2\mu_l/m_{s_l}$$

и

$$2(\nu_l - 1)/m_{s_l} \le 1 - \varepsilon_l < 2\nu_l/m_{s_l}.$$

В дальнейшем рассматриваем только множества $I_{n_{s_l+i-1}}(q, \varepsilon_l), l = 1, 2, 3, ...; i = \mu_l, \mu_l + 1, \mu_l + 2, ..., \nu_l$. Каждое множество $I_{n_{s_l+i-1}}(q, \varepsilon_l)$ получается из сегментов $[-1+\varepsilon_l; 1-\varepsilon_l]$ выбрасыванием конечного числа интервалов (см. (2)), причем наибольшая из длин этих интервалов не превосходит $2c_{2,l}/qn_{s_l+i-1}$.

Отсюда и из того, что $n_{s_l+i-1} > m^3_{s_l}$, следует, что множества

$$E_{i,m_{s_l}} = \Delta_{i+1,s_l} \cap I_{n_{s_l+i-1}}(q, \varepsilon_l), l = 1, 2, 3, ...; i = \mu_l, ..., \nu_l, \qquad (6)$$

не пустые и

$$mesE_{i,m_{s_l}} > 2/m_{s_l} - 4c_{2,l}/m_{s_l}qc_{1,l} > 2(1 - \varepsilon_l)/m_{s_l} \ , \qquad (7)$$

так как в силу (1) на промежутке $\Delta_{i+1,m_{s_l}}$ лежит не более чем $2n_{s_l+i-1}/m_{s_l}c_l$ узлов n_{s_l+i-1}-й строки матрицы R, а выбрасываем из отрезка $\Delta_{i+1,m_{s_l}}$ интервалы, содержащие эти узлы и имеющие длину, не превосходящую $2c_{2,l}/q \cdot n_{s_l+i-1}$.

Положим

$$E_{m_{s_l}} = \bigcup_{i=\mu_l}^{\nu_l} E_{i,m_{s_l}} \qquad (8)$$

и

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=k}^{\infty} E_{m_{s_l}}. \tag{9}$$

Очевидно, что $E \subset [-1;1]$ и из (5), (6), (7) имеем $\mathrm{mes} E_{m_{s_l}} > 2 - 4\varepsilon_l$, а в силу [1, лемма 12] $\mathrm{mes} E \geq 2 - 4\varepsilon_l$. Применяя лемму 3, получаем $\mathrm{mes} E = \lim\limits_{l\to\infty}(\mathrm{mes} E_{m_{s_l}}) = 2$ при $\lim\limits_{l\to\infty} \varepsilon_l = 0$.

Так же, как в [1, теорема 1], доказывается, что функция (3) и множество (9) — искомые. Далее для всех точек $x \in E$ из [1, (82)] и (4) получаем, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, |L_n(R, f, x)| = \infty$.

Теорема доказана [2, 3].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Привалов А.А.* О расходимости интерполяционных процессов Лагранжа // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17, № 4. С. 837–854.
2. *Турецкий А.Х.* Теория интерполирования в задачах. Минск: Высш. шк., 1968.
3. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.

УДК 517.51

К.А. Туктамышева

ОБОБЩЕННАЯ АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФАБЕРА—ШАУДЕРА

Классическая система Фабера—Шаудера $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ на $[0,1]$ [1, глава 6] определяется так, чтобы $\|\varphi_k\|_\infty = 1$. При этом коэффициенты разложения функции f по системе $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ определяются так: $A_0(f) = f(0)$, $A_1(f) = f(1) - f(0)$, а при $n = 2^k + i$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq i \leq 2^k$, верно $A_n(f) = f((2i-1)/2^k) - (f((i-1)/2^k) + f(i/2^k))/2$. Мы рассматриваем коэффициенты $a_n(f)$ разложения по системе $\{\varphi_k^{(2)}\}_{k=0}^{\infty}$, где $\varphi_k^{(2)} = C_k \varphi_k$ и $\|\varphi_k^{(2)}\|_{L^2[0,1]} = 1$.

Пусть $\xi = \{x_i\}_0^n$ – разбиение $[0,1]$ и $\kappa_\xi^p = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ для $p \in (1,\infty)$. Положим $\omega_{1-1/p}(f,\delta) = \sup\limits_{\|\xi\|\leq\delta} \kappa_\xi^p(f)$, где $\|\xi\|$ – диаметр разбиения ξ. Пространство $C_p[0,1] = \left\{f : \lim\limits_{\delta\to 0} \omega_{1-1/p}(f,\delta) = 0\right\}$ является банаховым с нормой $\|f\|_{C_p} = \max(\|f\|_\infty, \omega_{1-\frac{1}{p}}(f,1))$. По определению $E_n(f)_{C_p} = \inf\limits_{c_i} \left\| f - \sum\limits_{i=0}^{n} c_i \varphi_i \right\|_{C_p}$.

Результаты следующей леммы можно найти в [2].