и

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=k}^{\infty} E_{m_{s_l}}. \qquad (9)$$

Очевидно, что $E \subset [-1;1]$ и из (5), (6), (7) имеем $\mathrm{mes} E_{m_{s_l}} > 2 - 4\varepsilon_l$, а в силу [1, лемма 12] $\mathrm{mes} E \geq 2 - 4\varepsilon_l$. Применяя лемму 3, получаем $\mathrm{mes} E = \lim\limits_{l\to\infty}(\mathrm{mes} E_{m_{s_l}}) = 2$ при $\lim\limits_{l\to\infty} \varepsilon_l = 0$.

Так же, как в [1, теорема 1], доказывается, что функция (3) и множество (9) — искомые. Далее для всех точек $x \in E$ из [1, (82)] и (4) получаем, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |L_n(R, f, x)| = \infty$.

Теорема доказана [2, 3].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Привалов А.А.* О расходимости интерполяционных процессов Лагранжа // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17, № 4. С. 837–854.
2. *Турецкий А.Х.* Теория интерполирования в задачах. Минск: Высш. шк., 1968.
3. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.

УДК 517.51

К.А. Туктамышева

ОБОБЩЕННАЯ АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФАБЕРА—ШАУДЕРА

Классическая система Фабера—Шаудера $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ на $[0,1]$ [1, глава 6] определяется так, чтобы $\|\varphi_k\|_\infty = 1$. При этом коэффициенты разложения функции f по системе $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ определяются так: $A_0(f) = f(0)$, $A_1(f) = f(1) - f(0)$, а при $n = 2^k + i$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq i \leq 2^k$, верно $A_n(f) = f((2i-1)/2^k) - (f((i-1)/2^k) + f(i/2^k))/2$. Мы рассматриваем коэффициенты $a_n(f)$ разложения по системе $\{\varphi_k^{(2)}\}_{k=0}^{\infty}$, где $\varphi_k^{(2)} = C_k\varphi_k$ и $\|\varphi_k^{(2)}\|_{L^2[0,1]} = 1$.

Пусть $\xi = \{x_i\}_0^n$ – разбиение $[0,1]$ и $\kappa_\xi^p = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ для $p \in (1,\infty)$. Положим $\omega_{1-1/p}(f,\delta) = \sup\limits_{\|\xi\|\leq\delta} \kappa_\xi^p(f)$, где $\|\xi\|$ – диаметр разбиения ξ. Пространство $C_p[0,1] = \left\{f : \lim\limits_{\delta\to 0} \omega_{1-1/p}(f,\delta) = 0\right\}$ является банаховым с нормой $\|f\|_{C_p} = \max(\|f\|_\infty, \omega_{1-\frac{1}{p}}(f,1))$. По определению $E_n(f)_{C_p} = \inf\limits_{c_i} \left\| f - \sum\limits_{i=0}^{n} c_i\varphi_i \right\|_{C_p}$.

Результаты следующей леммы можно найти в [2].

Лемма 1. 1) *Пусть* $\{E'_k\}_{k=1}^{\infty}$ – *убывающая к нулю последовательность. Тогда*

$$f_0=\sum_{n=1}^{\infty}(E'_{2^n}-E'_{2^{n+1}})\,2^{-\frac{n}{p}}\sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n}\varphi_i(x),\quad 1<p<\infty,$$

обладает свойством $E_k(f)_{C_p}\leq E'_k$, $k\in\mathbb{N}$.

2) *Пусть* $m\in\mathbb{Z}_+$, $f\in C_p[0,1]$, $1<p<\infty$. *Тогда* $\sum\limits_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}|A_n(f)|^p\leq$ $\leq\ 2^pE^p_{2^m}(f)_{C_p}$.

Следующая теорема является обобщением теоремы 3 из [2].

Теорема 1. *Пусть* φ – *вогнутая возрастающая функция, такая что* $\varphi(0)=0$, $f\in C_p[0,1]$, $1<p<\infty$, *и* γ *таково, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{\gamma}\varphi\left(n^{-\frac12-\frac1p}\right)$ *расходится. Если сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{\gamma}\varphi\left(n^{-\frac12-\frac1p}E_n(f)_{C_p}\right)$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{\gamma}\varphi(|a_n|)$ *тоже сходится.*

Если же $\{E'_n\}_{n=1}^{\infty}$ – *убывающая последовательность,* $\gamma+1-$ $-\ \frac12-\frac1p>0$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{\gamma}\varphi\left(n^{-\frac12-\frac1p}E'_n\right)=\infty$, *то найдется* $F_0\in$ $\in\ V_p[0,1]$, *такая что* $E_n\left(f_0\right)_p\leq E'_n$ *и при этом* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{\gamma}\varphi(|a_n(f_0)|)=\infty$.

Доказательство. Рассмотрим $b_k=\sum\limits_{n=2^k+1}^{2^{k+1}}n^{\gamma}=o(2^{k(\gamma+1)})$ и $\alpha_n=$ $=\ n^{\gamma}/b_k$, $2^k<n\leq 2^{k+1}$. Тогда $\alpha_n\geq 0$ и $\sum\limits_{n=2^k+1}^{2^{k+1}}\alpha_n=1$, так что можно применять неравенство Йенсена. С одной стороны, имеем

$$\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}}n^{\gamma}\frac{|a_n|}{b_k}\leq\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}}2^{(k+1)\gamma}\frac{|a_n|}{2^{k(\gamma+1)}}\leq 2^{\gamma-k}\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}}|a_n|,$$

а с другой стороны, по неравенству Йенсена

$$\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}}n^{\gamma}\varphi(|a_n|)\leq b_k\varphi\left(\left(\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}}|a_n|\right)2^{\gamma-k}\right).$$

Применяя к внутренней скобке неравенство Гельдера, получаем

$$\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}}n^{\gamma}\varphi(|a_n|)\leq b_k\varphi\left(2^{\gamma}\left(\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}}|a_n|^p\right)^{\frac1p}2^{k(1-\frac1p)}2^{-k}\right).$$

Используя вторую часть леммы, находим что:

$$\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} n^\gamma \varphi(a_n) \le b_k \varphi\left(2^\gamma C_1 2^{-\frac{k}{2}} E_{2^k}(f)_{C_p} 2^{-\frac{k}{p}}\right) \le C_2 b_k \varphi(2^{k(-\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} E_{2^k}(f)_{C_p}).$$

Так как $b_k \le C_3 2^{k(\gamma+1)}$ и при $n \in [2^{k-1}+1, 2^k]$ верно $2^{-k(\frac{1}{p}+\frac{1}{2})} E_{2^k}(f)_{V_p} \le$ $\le\ n^{-(\frac{1}{p}+\frac{1}{2})} E_n(f)_{C_p}$, то

$$\varphi\left(2^{-k}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\right) E_{2^k}(f)_{V_p}\right) \le 2^{1-k} \sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} \varphi\left(n^{-(\frac{1}{p}+\frac{1}{2})} E_n(f)_{V_p}\right)$$

и соответственно

$$\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} n^\gamma \varphi(|a_n|) \le C_3 2^{k(\gamma+1)} 2^{-k+1} \sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} \varphi(n^{-\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} E_n(f)_{C_p}).$$

Суммируя последнее неравенство по $k \ge 1$, получаем

$$\sum_{n=3}^{\infty} n^\gamma \varphi(|a_n|) \le C_4 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} n^\gamma \varphi\left(n^{-\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} E_n(f)_{C_p}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} n^\gamma \varphi\left(n^{-\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} E_n(f)_{C_p}\right),$$

откуда следует первая часть теоремы.

2) Рассмотрим функцию f_0 из части 1) леммы. Так как $\varphi_n^{(2)} =$ $=\ 2^{\frac{k}{2}}\sqrt{3}\varphi_n$ при $n \in \left[2^k+1, 2^{k+1}\right]$, то $a_n(f_0) = \left(E'_{2^k} - E'_{2^{k+1}}\right) 2^{-\frac{k}{2}-\frac{k}{p}} 3^{-\frac{1}{2}}$ при $n \in \left[2^{k-1}+1, 2^k\right]$. Докажем, что при $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^\gamma \varphi\left(n^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} E'_n\right) = \infty$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^\gamma \varphi(|a_n(f_0)|)$ будет расходиться.

Известно, что вогнутая функция $\varphi(x)$, такая что $\varphi(0) = 0$, удовлетворяет $\varphi(x+y) \le \varphi(x) + \varphi(y)$, $x, y > 0$, и $\varphi(Cx) \le C\varphi(x)$, $x > 0$, $C > 1$.

Поэтому при $i \in [2^{n-1}+1, 2^n]$, $n \in \mathbb{N}$, имеем

$$\varphi(|a_i|) = \varphi\left(\left(E'_{2^n} - E'_{2^{n+1}}\right) 2^{-\frac{n}{p}-\frac{n}{2}} 3^{-\frac{1}{2}}\right) \ge 3^{-\frac{1}{2}} \left(\left(E'_{2^n} - E'_{2^{n+1}}\right) 2^{-\frac{n}{p}-\frac{n}{2}}\right)$$

и тогда

$$\sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n} i^\gamma \varphi(|a_i|) \ge C_5 2^{n-1} 2^{n\gamma} \varphi\left(\left(E'_{2^n} - E'_{2^{n+1}}\right) 2^{-\frac{n}{p}-\frac{n}{2}}\right) \ge$$

$$\ge C 2^{n(1+\gamma)} \left(\varphi\left(E'_{2^n} 2^{-\frac{n}{2}-\frac{n}{p}}\right) - \varphi\left(E'_{2^{n+1}} 2^{-\frac{(n+1)}{p}-\frac{(n+1)}{2}} 2^{\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}\right)\right) \ge$$

$$\geq C_6\left(2^{n(1+\gamma)}\varphi\left(E'_{2^n}2^{-\frac{n}{2}-\frac{n}{p}}\right)-2^{n+n\gamma+\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}\varphi\left(E'_{2^{n+1}}2^{-\frac{n+1}{p}-\frac{n+1}{2}}\right)\right)\geq$$

$$\geq C_6\left(2^{n(1+\gamma)}\varphi\left(E'_{2^n}2^{-\frac{n}{2}-\frac{n}{p}}\right)-2^{(n+1)(1+\gamma)-1-\gamma+\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}\varphi\left(E'_{2^{n+1}}2^{-\frac{n+1}{p}-\frac{n+1}{2}}\right)\right).$$

Складывая эти неравенства по n от 0 до ∞, получаем

$$\sum_{i=2}^{\infty} i^\gamma\varphi(|a_i|)\geq C_6\left(2^{1+\gamma}\gamma\left(E'_2 2^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\right)+\sum_{n=2}^{\infty}2^{n(1+\gamma)}\varphi\left(E'_{2^n}2^{-\frac{n}{2}-\frac{n}{p}}\right)C_7\right),$$

где $C_7=1-2^{-1-\gamma+\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}$.

Таким образом, $\sum\limits_{i=2}^{\infty} i^\gamma\varphi(|a_i|)\geq C_8\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n(1+\gamma)}\varphi\left(E'_{2^n}2^{-\frac{n}{2}-\frac{n}{p}}\right)$. Пусть $i\in$ $\in\left[2^n+1,2^{n+1}\right]$. Тогда $\varphi(E'_{2^n}2^{-\frac{n}{2}-\frac{n}{p}})\geq\varphi(E'_i i^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}))$. Поэтому

$$2^n 2^{n(1+\gamma)}\varphi(E'_{2^n}2^{-\frac{n}{2}-\frac{n}{p}})\geq\sum_{i=2^k+1}^{2^{n+1}}\frac{i^\gamma}{2^\gamma}\varphi(E'_i i^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}})=2^{-\gamma}\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}}i^\gamma\varphi(E'_i i^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}).$$

Суммируя, получаем $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n(1+\gamma)}\varphi(E'_{2^n}2^{-\frac{n}{2}-\frac{n}{p}}) \leq 2^{-\gamma}\sum\limits_{i=3}^{\infty}i^\gamma\varphi(E'_i i^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}})$. Последний ряд по условию расходится, следовательно, расходится левая часть последнего неравенства и $\sum\limits_{i=2}^{\infty}i^\gamma\varphi(|a_i|)=\infty$, что и требовалось доказать.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Кашин Б.С., Саакян А.А.* Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984. 496 с.
2. *Волосивец С.С.* Приближение функций ограниченной p вариации полиномами по системе Фабера—Шаудера // Мат. заметки. 1997. Т. 62, вып. 3. С. 363–371.

УДК 517.518.85

К.Б. Турашвили

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОМ АНАЛОГЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРИЗНАКА ДИНИ

Рассмотрим задачу Штурма—Лиувилля:

$$\begin{cases} u''(x)+[\lambda-q(x)]u(x)=0,\\ u'(0)-hu(0)=0,\\ u'(\pi)+Hu(\pi)=0,\end{cases}\tag{1}$$

где h и H — произвольные действительные числа, а потенциал q — непрерывная функция ограниченной вариации.