$$\geq C_6\left(2^{n(1+\gamma)}\varphi\left(E'_{2^n}2^{-\frac{n}{2}-\frac{n}{p}}\right)-2^{n+n\gamma+\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}\varphi\left(E'_{2^{n+1}}2^{-\frac{n+1}{p}-\frac{n+1}{2}}\right)\right)\geq$$

$$\geq C_6\left(2^{n(1+\gamma)}\varphi\left(E'_{2^n}2^{-\frac{n}{2}-\frac{n}{p}}\right)-2^{(n+1)(1+\gamma)-1-\gamma+\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}\varphi\left(E'_{2^{n+1}}2^{-\frac{n+1}{p}-\frac{n+1}{2}}\right)\right).$$

Складывая эти неравенства по $n$ от 0 до $\infty$, получаем

$$\sum_{i=2}^{\infty} i^{\gamma}\varphi(|a_i|)\geq C_6\left(2^{1+\gamma}\gamma\left(E'_2 2^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\right)+\sum_{n=2}^{\infty}2^{n(1+\gamma)}\varphi\left(E'_{2^n}2^{-\frac{n}{2}-\frac{n}{p}}\right)C_7\right),$$

где $C_7=1-2^{-1-\gamma+\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}$.

Таким образом, $\sum\limits_{i=2}^{\infty} i^{\gamma}\varphi(|a_i|)\geq C_8\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n(1+\gamma)}\varphi\left(E'_{2^n}2^{-\frac{n}{2}-\frac{n}{p}}\right)$. Пусть $i\in$ $\in\left[2^n+1,2^{n+1}\right]$. Тогда $\varphi(E'_{2^n}2^{-\frac{n}{2}-\frac{n}{p}})\geq\varphi(E'_i i^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}))$. Поэтому

$$2^n 2^{n(1+\gamma)}\varphi(E'_{2^n}2^{-\frac{n}{2}-\frac{n}{p}})\geq\sum_{i=2^k+1}^{2^{n+1}}\frac{i^{\gamma}}{2^{\gamma}}\varphi(E'_i i^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}})=2^{-\gamma}\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}}i^{\gamma}\varphi(E'_i i^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}).$$

Суммируя, получаем $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n(1+\gamma)}\varphi(E'_{2^n}2^{-\frac{n}{2}-\frac{n}{p}})\leq 2^{-\gamma}\sum\limits_{i=3}^{\infty}i^{\gamma}\varphi(E'_i i^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}})$. Последний ряд по условию расходится, следовательно, расходится левая часть последнего неравенства и $\sum\limits_{i=2}^{\infty}i^{\gamma}\varphi(|a_i|)=\infty$, что и требовалось доказать.


БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Кашин Б.С., Саакян А.А.* Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984. 496 с.
2. *Волосивец С.С.* Приближение функций ограниченной $p$ вариации полиномами по системе Фабера—Шаудера // Мат. заметки. 1997. Т. 62, вып. 3. С. 363–371.



УДК 517.518.85



**К.Б. Турашвили**


## ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОМ АНАЛОГЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРИЗНАКА ДИНИ

Рассмотрим задачу Штурма—Лиувилля:

$$\begin{cases} u''(x)+[\lambda-q(x)]u(x)=0,\\ u'(0)-hu(0)=0,\\ u'(\pi)+Hu(\pi)=0,\end{cases}\tag{1}$$

где $h$ и $H$ — произвольные действительные числа, а потенциал $q$ — непрерывная функция ограниченной вариации.

Введем оператор Лагранжа:

$$L_n^{SL}(f,x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_n(x)}{u_n'(x_{k,n})(x - x_{k,n})} f(x_{k,n}), \tag{2}$$

где $u_n(x)$ — собственные функции задачи Штурма—Лиувилля (1), $u_n(x_{k,n}) = 0$, $0 \le x_{1,n} < x_{2,n} < \ldots < x_{n,n} \le \pi$. Для $n \in \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le n$ данный оператор обладает интерполяционным свойством Лагранжа $L_n^{SL}(f, x_{k,n}) = f(x_{k,n})$, $k = \overline{1,n}$.

Заметим, что интегральный признак Дини сходимости рядов Фурье непрерывных функций не имеет места в случае интерполяционных процессов Лагранжа—Штурма—Лиувилля.

**Теорема 1 (признак Дини сходимости рядов Фурье).** *Если функция $f$ удовлетворяет условию*

$$\int_0^{\pi} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| dx < \infty,$$

*то ее ряд Фурье по тригонометрической системе в точке $x_0$ сходится к $f(x_0)$.*

**Теорема 2 (аналог признака Дини).** *Пусть $h$ и $H$ — произвольные действительные числа в краевых условиях, $q$ — непрерывный потенциал ограниченной вариации, функция $f$ интегрируема в смысле Римана на $[A,B] \subset (0,\pi)$, точка $x_0 \in (A,B)$ и функция $\varphi_{x_0}(x)$, мажорирующая функцию $\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|$, монотонно возрастает при $x < x_0$ и убывает при $x > x_0$. Тогда, если для некоторого $a$, $0 < a \le \pi$, $\varphi_{x_0}$ суммируема в $a$-окрестности точки $x_0$, то есть*

$$\int_{x_0-a}^{x_0+a} \varphi_{x_0}(x)dx < \infty, \tag{3}$$

*то интерполяционный процесс Лагранжа—Штурма—Лиувилля (1) сходится к значению функции $f$ в точке $x_0$.*

**Доказательство.** Возьмем произвольное положительное $\varepsilon$. Из (3) следует непрерывность функции $f$ в точке $x_0$ и существование положительного $\delta$, для которого имеет место неравенство

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \varphi_{x_0}(x)dx < \frac{\varepsilon\pi}{2M}, \tag{4}$$

где

$$M = \sup\{|u_n(x)|, x \in [0,\pi], n \in \mathbb{N}\}. \tag{5}$$

Индекс $p$ определим из неравенств:

$$x_{p,n} \leq x_0 < x_{p+1,n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{6}$$

Из непрерывности $f$ в точке $x_0$ и асимптотической формулы для $x_{k,n}$ (вывод асимптотических формул см. [1]):

$$x_{k,n} = \frac{2k-1}{2n}\pi + \frac{1}{n^2}\beta(\frac{2k-1}{2n}\pi) + O(n^{-3}) \tag{7}$$

находим номер $n_1$, начиная с которого выполняется неравенство

$$\left|\sum_{k=p-1}^{p+1}(f(x_{k,n}) - f(x_0))l_{k,n}^{SL}(x_0)\right| \leq 3C_1\omega_{x_0}(f, \max_{k=p-1,p,p+1}|x_{k,n} - x_0|) < \varepsilon, \tag{8}$$

где $\omega_{x_0}$ — модуль непрерывности в точке $x_0$. Существование константы $C_1$ следует из леммы 1.2 [2, С. 14, 15].

Из асимптотических формул (см. [1, 3]):

$$u_n(x) = \cos nx + \frac{\beta(x)}{n}\sin nx + O(n^{-2}),$$

$$u_n'(x) = -n\sin nx + \beta(x)\cos nx + O(n^{-1}),$$

$$u_n'(x_{k,n}) = (-1)^k n + O(n^{-1}),$$

неравенства треугольника и формулы конечных приращений Лагранжа получим

$$\left|\sum_{k=1}^{n}|l_{k,n}^{SL}(x)| - \frac{|u_n(x)|}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|x - x_{k,n}|}\right| \leq$$

$$= \sum_{k=1}^{n} u_n'(\xi_{k,n})O(n^{-3}) = O(n^{-1}). \tag{9}$$

В силу ограниченности интегрируемой в смысле Римана функции $f$ и (9) найдется такой номер $n_2$, что для всех $n \geq n_2$

$$\left|\sum_{k=1}^{n}|f(x_{k,n}) - f(x_0)| \ \ |l_{k,n}^{SL}(x_0)| - \frac{|u_n(x_0)|}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{|f(x_{k,n}) - f(x_0)|}{|x_{k,n} - x_0|}\right| \leq$$

$$\leq 2\sup_{x\in[0,\pi]}|f(x)|\frac{C_2}{n} < \varepsilon.$$

Найдем номер $n_3$, начиная с которого выполняется

$$\min_{k=\overline{1,n-1}}(x_{k+1,n}-x_{k,n})\geq\frac{\pi}{2n}.$$

Тогда из (5) и (8) получим

$$\left|\sum_{k:x_{k,n}\in O_\delta(x_0)}(f(x_{k,n})-f(x_0))l_{k,n}^{SL}(x_0)\right|\leq\frac{|u_n(x_0)|}{n}\left\{\sum_{k=m}^{p-2}\frac{|f(x_{k,n})-f(x_0)|}{|x_{k,n}-x_0|}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=p+2}^{l}\frac{|f(x_{k,n})-f(x_0)|}{|x_{k,n}-x_0|}\right\}+2\varepsilon\leq\frac{2M}{\pi}\left\{\sum_{k=m}^{p-2}\varphi_{x_0}(x_{k,n})(x_{k+1,n}-x_{k,n})+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=p+2}^{l}\varphi_{x_0}(x_{k,n})(x_{k,n}-x_{k-1,n})\right\}+2\varepsilon,$$

где $O_\delta(x_0)$ — $\delta$-окрестность точки $x_0$; $m$ и $l$ — номера наименьшего и наибольшего из узлов, попадающих в $\delta$-окрестность точки $x_0$.

По уловию теоремы функция $\varphi_{x_0}(x)$ возрастает при $x<x_0$ и убывает $x>x_0$. Тогда из (6) имеем

$$\left|\sum_{k:x_{k,n}\in O_\delta(x_0)}(f(x_{k,n})-f(x_0))l_{k,n}^{SL}(x_0)\right|\leq\frac{2M}{\pi}\left\{\sum_{k=m}^{p-2}\int_{x_{k,n}}^{x_{k+1,n}}\varphi_{x_0}(x)dx+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=p+2}^{l}\int_{x_{k-1,n}}^{x_{k,n}}\varphi_{x_0}(x)dx\right\}+2\varepsilon\leq\frac{2M}{\pi}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\varphi_{x_0}(x)dx+2\varepsilon.$$

В точке $x_0\in[0,\pi]$ имеет место принцип локализации (в силу леммы 5.2 из [2]). Определим функцию

$$g(x)=\begin{cases}f(x)-f(x_0), & \text{если } x\in O_\delta(x_0),\\ 0, & \text{если } x\overline{\in}O_\delta(x_0).\end{cases}$$

Теперь из следующих соотношений:

$$L_n^{SL}(f,x_0)-f(x_0)=\sum_{k=1}^{n}f(x_{k,n})l_{k,n}^{SL}(x_0)-f(x_0)\sum_{k=1}^{n}l_{k,n}^{SL}(x_0)+$$

$$+O\left(\frac{\ln n}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n}(f(x_{k,n})-f(x_0))l_{k,n}^{SL}(x_0)+O\left(\frac{\ln n}{n}\right),$$

$$|L_n^{SL}(f(\cdot)-f(x_0),x_0)-L_n^{SL}(g,x_0)|=$$

$$=\left|\sum_{k:x_{k,n}\in[0,\pi]\setminus O_\delta(x_0)}(f(x_{k,n})-f(x_0))l_{k,n}^{SL}(x_0)\right|<\varepsilon,$$

неравенства (4) и соответствующего выбора $n$ получим

$$\left|L_n^{SL}(f,x_0)-f(x_0)\right|\le\left|\sum_{k:x_{k,n}\in O_\delta(x_0)}(f(x_{k,n})-f(x_0))l_{k,n}^{SL}(x_0)\right|+$$

$$+\left|\sum_{k:x_{k,n}\in[0,\pi]\setminus O_\delta(x_0)}(f(x_{k,n})-f(x_0))l_{k,n}^{SL}(x_0)\right|+\varepsilon\le\left|\sum_{k:x_{k,n}\in O_\delta(x_0)}(f(x_{k,n})-f(x_0))l_{k,n}^{SL}(x_0)\right|+$$

$$+2\varepsilon\le\frac{2M}{\pi}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\varphi_{x_0}(x)dx+4\varepsilon\le5\varepsilon.$$

Таким образом, теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения: М., 1953. Т. 1, 2.

2. *Трынин А.Ю.* Сходимость интерполяционных процессов по собственным функциям задачи Штурма—Лиувилля: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 1992. 121 с.

3. *Трынин А.Ю.* О равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа—Штурма—Лиувилля. Саратов, 1991. 32 с. Деп. в ВИНИТИ 26.04.91, № 1763-В91.

УДК 517.984

**А.Е. Федосеев**

## ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ ОПЕРАТОРЕ С РАЗРЫВНЫМ ПРЕДЕЛОМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

В данной статье получена теорема равносходимости разложений в тригонометрические ряды Фурье и в ряды по собственным и присоединенным функциям интегрального оператора, в котором верхний предел интегрирования является разрывной функцией.