Теорема 2. *Если* $u(x) \in Lip_M 1$, *то при* $h = h(r) = \dfrac{1}{r}\ln\dfrac{2Kr}{M}$ *справедлива оценка*

$$|\Omega_r u - u| \le \frac{M}{r}\ln\frac{2Kr}{M} + \frac{M}{r} + Ke^{-r/2},$$

где $K = \|u\|_{C[0,1]}$, $x \in [0,1]$ – *любое.*

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-4383.2010.1) и гранта РФФИ (проект 10-01-00270).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хромов А.А.* Приближающие свойства степеней резольвенты оператора дифференцирования // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 3. С. 75–78.

УДК 517.984

А.П. Хромов

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ ОПЕРАТОРЕ С РАЗРЫВНОЙ ОБЛАСТЬЮ ЗНАЧЕНИЙ

Пусть A — интегральный оператор:

$$Af = \int_0^1 A(x,t)f(t)\,dt,$$

ядро которого есть

$$A(x,t) = \varepsilon\left(\tfrac{1}{2}, x\right)\varepsilon(t,x) + \varepsilon\left(x, \tfrac{1}{2}\right)\varepsilon(x,t),$$

где $\varepsilon(x,t) = 1$ при $t \le x$, $\varepsilon(x,t) = 0$ при $t > x$. Ядро $A(x,t)$ терпит разрывы при $x = t$ и $x = \frac{1}{2}$. Область значений оператора A, вообще говоря, разрывна при $x = \frac{1}{2}$. Мы рассмотрим задачу разложения по собственным функциям (в дальнейшем с.ф.) этого оператора. Оператор A интересен тем, что соответствующая краевая задача на собственные значения нерегулярна по Биркгофу и сходимость разложений по с.ф. обеспечивается специальным функциональным соотношением, которому должна удовлетворять разлагаемая функция. Функциональные соотношения в нерегулярных краевых задачах использовались и ранее [1, 2].

Пусть $y = \lambda A y$. Тогда имеем

$$y(x) = \lambda \int\limits_x^1 y(t)\,dt, \quad x \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right], \tag{1}$$

$$y(x) = \lambda \int\limits_0^x y(t)\,dt, \quad x \in \left[\tfrac{1}{2}, 1\right]. \tag{2}$$

Лемма 1. *Пусть* $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$ *(T — знак транспонирования), где* $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = y\left(\frac{1}{2} + x\right)$, $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. *Тогда (1), (2) эквивалентна краевой задаче*

$$z_1'(x) = -\lambda z_1(x), \quad z_2'(x) = \lambda z_2(x), \tag{3}$$

$$z_1(0) = z_2\left(\tfrac{1}{2}\right), \quad z_1(0) = z_1\left(\tfrac{1}{2}\right) + z_2(0). \tag{4}$$

Уравнение для собственных значений есть

$$\Delta(\lambda) = e^{\frac{1}{2}\lambda} - 2 = 0.$$

Краевые условия (4) нерегулярны по Биркгофу, так как в $\Delta(\lambda)$ нет члена с $e^{-\frac{1}{2}\lambda}$.

Лемма 2. *Для собственных значений краевой задачи (3), (4) справедливы формулы*

$$\lambda_k = 4k\pi i + 2\ln 2, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

При этом все λ_k *простые. Соответствующие собственные функции есть*

$$z(x, \lambda_k) = (2 \cdot 4^{-x} e^{-4k\pi i x}, 4^x e^{4k\pi i x})^T.$$

По лемме 2 на основании леммы 1 получаем

Теорема 1. *Собственные функции оператора* A *есть*

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} 2 \cdot 4^{-x} e^{-4k\pi i x}, & x \le \frac{1}{2}, \\ 2^{-1} \cdot 4^x e^{4k\pi i x}, & x > \frac{1}{2}, \end{cases} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Отметим, что все собственные функции $\varphi_k(x)$ непрерывны на $[0, 1]$, ибо $\varphi_k\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \varphi_k\left(\frac{1}{2} + 0\right)$.

Теорема 2. *Если* $f(x)$ *разлагается в равномерно сходящийся на всем* $[0, 1]$ *ряд Фурье по с.ф. оператора* A, *то* $f(x) \in C[0, 1]$, $f(x) = f(1 - x)$, $f(1) = 2f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Доказательство. Пусть $f(x) = \sum a_k \varphi_k(x)$, где ряд сходится равномерно на $[0,1]$. Тогда, прежде всего, $f(x) \in C[0,1]$. Пусть теперь $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Тогда имеем

$$f(x) = 2^{-1} \cdot 4^x \sum a_k e^{4k\pi i x}.$$

Положим $g(x) = \sum a_k e^{4k\pi i x}$. Тогда $g(x) \in C(-\infty, \infty)$, периодична с периодом $\frac{1}{2}$ и, в частности, имеем

$$g\left(\tfrac{1}{2}\right) = g(1). \tag{5}$$

Пусть $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Тогда

$$f(x) = 2 \cdot 4^{-x} \sum a_k e^{-4k\pi i x} = 2^{-1} \cdot 4^{1-x} \sum a_k e^{4k\pi i(1-x)} = f(1-x).$$

Наконец, $f\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right)$ и в силу (5) $f(1) = 2g(1) = 2g\left(\frac{1}{2}\right) = 2f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Если* $f(x) \in C[0,1] \cap V[0,1]$*,* $f(x) = f(1-x)$*,* $f(1) = 2f\left(\frac{1}{2}\right)$*, то* $f(x)$ *разлагается в сходящийся на* $[0,1]$ *ряд Фурье по с.ф. оператора* A*.*

Доказательство. Пусть $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Положим $g(x) = 2 \cdot 4^{-x} f(x)$. Тогда $g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} f(1) = g(1)$. Значит, $g(x)$ разлагается на $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ в равномерно сходящийся ряд Фурье по тригонометрической системе $\{e^{4k\pi i x}\}_{-\infty}^{+\infty}$, т. е. $g(x) = \sum a_k e^{4k\pi i x}$. Тем самым $f(x) = 2^{-1} \cdot 4^x \sum a_k e^{4k\pi i x} = \sum a_k \varphi_k(x)$. Пусть теперь $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Тогда имеем

$$f(x) = f(1-x) = 2^{-1} \cdot 4^{1-x} \sum a_k e^{4k\pi i(1-x)} =$$

$$= 2 \cdot 4^{-x} \sum a_k e^{-4k\pi i x} = \sum a_k \varphi_k(x).$$

Теорема доказана.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-*4383.2010.1*) и гранта РФФИ (проект №* 10-01-00270*).*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хромов А.П.* Разложение по собственным функциям одной краевой задачи третьего порядка // Исследования по теории операторов: сб. науч. тр. Уфа, 1988. С. 182–193.

2. *Гуревич А.П., Хромов А.П.* Операторы дифференцирования первого и второго порядков со знакопеременной весовой функцией // Мат. заметки. 1994. Т. 56, вып. 1. С. 3–15.