где $\Psi_1(\alpha), \Psi_2(\alpha)$ *суть* $O(\alpha^{\frac{5}{4}})$.

Доказательство. Подставляем выражение для $B(x,t)$ и (2) в (3), обозначаем внутренний интеграл в (3) через J. Получаем

$$J = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_1^2}(1 - \frac{ch\alpha_1(1-x)sh\alpha_1 t}{sh\alpha_1}), \ t \le x, \\ \frac{ch\alpha_1 x sh\alpha_1(1-t)}{\alpha_1^2 sh\alpha_1}, \ t > x. \end{cases}$$

Отсюда получаем $\Delta_1(T_\alpha, M_B) = \sup\limits_{0 \le x \le 1} \{[\frac{1}{4\alpha_1 sh^2\alpha_1}(ch^2\alpha_1(1-x)sh2\alpha_1 x +$ $+ ch^2\alpha_1 x sh2\alpha_1(1-x)) - \frac{xch^2\alpha_1(1-x)+(1-x)ch^2\alpha_1 x}{2sh^2\alpha_1}](1+O(\alpha))\}^{\frac{1}{2}}$.

Далее, заменяем гиперболические функции их выражениями через экспоненты, α_1 выражаем через α, учитываем, что $1+O(\alpha)^{\frac{1}{2}} = 1+O(\alpha)$, а

$$\max_{x\in[0,1]}[xe^{-2\alpha_1 x} + (1-x)e^{-2\alpha_1(1-x)}] = e^{-\alpha_1},$$

и приходим к утверждению теоремы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (прект 10-01-00270) и гранта Президента РФ (проект НШ-4383.2010.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Тихонов А.Н.* О регуляризации некорректно поставленных задач // ДАН СССР. 1963. Т. 153, № 1. С. 49–52.

2. *Хромова Г.В.* О тихоновской регуляризации // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2001. Т. 1. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 2. С. 75–78.

3. *Хромова Г.В.* Об одном способе нахождения приближенных решений операторных уравнений первого рода // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика: межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1973. Вып. 3. С. 58–79.

4. *Хромова Г.В.* О модулях непрерывности неограниченных операторов // Изв. вузов. Сер. Математика. 2006. № 9(532). С. 71–78.

5. *Хромова Г.В.* Об оценках погрешности приближенных решений уравнений первого рода // ДАН. 2001. Т. 378, № 5. С. 605–609.

УДК 517.984

В.А. Юрко

ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА НЕКОМПАТНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СЕТЯХ

1. Исследуется обратная задача восстановления операторов Бесселя на некомпактных звездообразных графах. Доказана теорема единственности и получена конструктивная процедура решения обратной задачи. Отметим, что обратные задачи на компактных графах исследовались в [1–3] и других работах.

Рассмотрим некомпактный звездообразный граф T в $\mathbf{R}^\ell$ с множеством вершин $\mathcal{V} = \{v_0, \dots, v_p\}$ и множеством ребер $\mathcal{E} = \{e_0, \dots, e_p\}$, где $e_j = [v_j, v_0]$, $j = \overline{1,p}$ — конечные отрезки, а $e_0 = [v_0, v_{p+1})$ — луч, $v_{p+1} := \infty$. Пусть l_j — длина ребра e_j, $j = \overline{1,p}$. Каждое ребро e_j, $j = \overline{1,p}$, параметризуется параметром $x_j \in [0, l_j]$ так, что начальная точка v_j соответствует $x_j = 0$, а конечная точка v_0 соответствует $x_j = l_j$. Луч $e_0 = [v_0, \infty)$ параметризуется параметром $x_0 \in [0, \infty)$ так, что $x_0 = 0$ соответствует вершине v_0.

Интегрируемая функция Y на T имеет вид: $Y = \{y_j\}_{j=\overline{0,p}}$, где функция $y_j(x_j)$ определена на ребре e_j. Пусть $q = \{q_j\}_{j=\overline{0,p}}$ — интегрируемая функция на T; q называется потенциалом. Рассмотрим дифференциальное уравнение на T:

$$-y_j''(x_j) + \Big(\frac{\omega_j}{x_j^2} + q_j(x_j)\Big) y_j(x_j) = \lambda y_j(x_j), \quad j = \overline{0,p}, \tag{1}$$

со стандартными условиями склейки в вершине v_0 (см. [2]). Здесь $\omega_j = \nu_j^2 - 1/4$, $Re\,\nu_j > 0$, $\nu_j \notin \mathbf{N}$, $\nu_0 = 1/2$, и комплекснозначные функции $q_j(x_j) x_j^{1-2Re\,\nu_j}$ интегрируемы на e_j. Введем линейные формы:

$$\sigma_{jk}(y_j) := (-1)^{k-1} \langle y_j(x_j), S_{j,3-k}(x_j, \lambda)\rangle_{|x_j=0}, \quad k = 1, 2, \ j = \overline{1,p},$$

где $\langle y, z\rangle := yz' - y'z$, а $\{S_{jm}(x_j, \lambda)\}_{m=1,2}$ — фундаментальная система решений Бесселя уравнения (1) на ребре e_j такая, что $S_{jm}(x_j, \lambda) \sim c_{jm} x_j^{\mu_{jm}}$, $x_j \to 0$, $\mu_{jm} = (-1)^m \nu_j + 1/2$, $c_{j1} c_{j2} = (2\nu_j)^{-1}$, $\langle S_{j1}, S_{j2}\rangle \equiv 1$ [4]. Рассмотрим вектор $h = [h_j]_{j=\overline{1,p}}$, где h_j — комплексные числа. Положим $U_j(y_j) = \sigma_{j2}(y_j) - h_j \sigma_{j1}(y_j)$, $V_j(y_j) = \sigma_{j1}(y_j)$. Пусть $\lambda = \rho^2$, $Im\,\rho \geq 0$, и пусть $e(x_0, \rho)$ — решение Йоста [1] на ребре e_0, а $\varphi_j(x_j, \lambda)$ — решение на ребре e_j при условиях $V_j(\varphi_j) = 1$, $U_j(\varphi_j) = 0$.

Зафиксируем $k = \overline{1,p}$. Пусть $\Psi_k = \{\psi_{kj}\}_{j=\overline{0,p}}$ — решение уравнения (1) на T, удовлетворяющее условиям склейки

$$\psi_{kj}(l_j, \lambda) = \psi_{k0}(0, \lambda), \ j = \overline{1,p}, \qquad \sum_{j=1}^{p} \psi_{kj}'(l_j, \lambda) = \psi_{k0}'(0, \lambda) \tag{2}$$

и граничным условиям

$$U_j(\psi_{kj}) = \delta_{kj}, \ j = \overline{1,p}, \quad \psi_{k0}(x_0, \lambda) = O(\exp(i\rho x_0)), \ x_0 \to \infty, \tag{3}$$

где δ_{kj} — символ Кронекера. Функцию $M_k(\lambda) := V_k(\psi_{kk})$ будем называть функцией Вейля относительно вершины v_k, а вектор $M(\lambda) = [M_k(\lambda)]_{k=\overline{1,p}}$ — вектором Вейля.

Обратная задача. Дан вектор Вейля $M(\lambda)$, построить потенциал q на графе T и вектор h.

2. Функции Вейля имеют вид

$$M_k(\lambda) = \frac{\Delta_k(\rho)}{\Delta(\rho)},$$

где

$$\left.\begin{aligned} \Delta(\rho) &= G_0(\lambda)e'(0,\rho) - g_0(\lambda)e(0,\rho), \\ \Delta_k(\rho) &= G_k(\lambda)e'(0,\rho) - g_k(\lambda)e(0,\rho), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$G_0(\lambda) = \prod_{j=1}^{p} \varphi_j(l_j,\lambda), \quad g_0(\lambda) = G_0(\lambda)\sum_{j=1}^{p} \frac{\varphi_j'(l_j,\lambda)}{\varphi_j(l_j,\lambda)}, \tag{5}$$

а $G_k(\lambda)$ и $g_k(\lambda)$ получаются из $G_0(\lambda)$ и $g_0(\lambda)$ заменой $\varphi_k^{(\xi)}(l_k,\lambda)$ на $S_{k2}^{(\xi)}(l_k,\lambda)$, $\xi = 0,1$. Обозначим $\Omega_\delta = \{\rho : \arg\rho \in [\delta, \pi-\delta]\}$. Зафиксируем $k = \overline{1,p}$, $\xi = 0,1$ и $x_k \in (0,l_k)$. Тогда при $|\rho| \to \infty$, $\rho \in \Omega_\delta$, справедливы асимптотические формулы:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_k^{(\xi)}(x_k,\lambda) &= (2i)^{-1} b_k \rho^{\nu_k - 1/2}(-i\rho)^\xi \exp(-i\rho x_k)[1], \\ \psi_{kk}^{(\xi)}(x_k,\lambda) &= (b_k)^{-1}\rho^{-\nu_k-1/2}(i\rho)^\xi \exp(i\rho x_k)[1], \\ M_k(\lambda) = b_k^0 (b_k)^{-1}\rho^{-2\nu_k}[1], &\quad [1] = 1 + O(\rho^{-\delta}),\ \delta = \min(1, 2Re\,\nu_1, \ldots, 2Re\,\nu_p). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где константы b_k и b_k^0 вычисляются по c_{k1}, c_{k2}. Используя условия склейки (2) и граничные условия (3), вычисляем:

$$\psi_{kk}(x_k,\lambda) = S_{k2}(x_k,\lambda) + M_k(\lambda)\varphi_k(x_k,\lambda), \tag{7}$$

$$\psi_{kj}(x_j,\lambda) = M_{kj}(\lambda)\varphi_j(x_j,\lambda),\ j \neq k, \quad \psi_{k0}(x_0,\lambda) = M_{k0}(\lambda)e(x_0,\rho), \tag{8}$$

где

$$M_{kj}(\lambda) = \frac{e(0,\rho)\varphi_1(l_1,\lambda)\cdots\varphi_p(l_p,\lambda)}{\Delta(\rho)\varphi_k(l_k,\lambda)\varphi_j(l_j,\lambda)}, \tag{9}$$

$$M_{k0}(\lambda) = \frac{\varphi_1(l_1,\lambda)\cdots\varphi_p(l_p,\lambda)}{\Delta(\rho)\varphi_k(l_k,\lambda)}.$$

Теорема 1. *Задание вектора Вейля $M(\lambda)$ однозначно определяет потенциал q на T и вектор h.*

Решение обратной задачи строится следующим образом.

1) Для каждого фиксированного $k = \overline{1,p}$ решаем вспомогательную обратную задачу: по заданной функции Вейля $M_k(\lambda)$ построить потенциал q_k на e_k и число h_k. При этом используются асимптотические формулы (6), соотношение (7) и метод спектральных отображений [1].

2) Строим решения $\varphi_k(x_k, \lambda)$ и $S_{k2}(x_k, \lambda)$ на ребре e_k, а затем $\psi_{kk}(x_k, \lambda)$ по формуле (7).

3) Используя условия склейки (2), вычисляем $\psi_{kj}(l_j, \lambda),\ j = \overline{1, p}$:

$$\psi_{kj}(l_j, \lambda) = \psi_{kk}(l_k, \lambda).$$

4) Строим $M_{kj}(\lambda)$ из соотношений (8):

$$M_{kj}(\lambda) = \frac{\psi_{kj}(l_j, \lambda)}{\varphi_j(l_j, \lambda)}\,.$$

5) Находим $G_0(\lambda)$ и $g_0(\lambda)$ из (5).

6) Вычисляем $\dfrac{\Delta(\rho)}{e(0, \rho)}$ из (9):

$$\frac{\Delta(\rho)}{e(0, \rho)} = \frac{\varphi_1(l_1, \lambda) \cdots \varphi_p(l_p, \lambda)}{M_{kj}(\lambda)\varphi_k(l_k, \lambda)\varphi_j(l_j, \lambda)}\,.$$

7) Строим $M_0(\lambda) := \dfrac{e'(0, \rho)}{e(0, \rho)}$, используя (4):

$$M_0(\lambda) = \frac{1}{G_0(\lambda)}\Big(\frac{\Delta(\rho)}{e(0, \rho)} + g_0(\lambda)\Big).$$

8) Решая обратную задачу на ребре e_0, строим потенциал q_0 по известной функции Вейля $M_0(\lambda)$ (см. [1]).

Таким образом, мы установили единственность решения обратной задачи на графе T и указали конструктивную процедуру построения этого решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Национального научного совета Тайваня (проекты 10-01-00099 и 10-01-92001-ННС).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Юрко В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.

2. *Yurko V.A.* Inverse spectral problems for Sturm—Liouville operators on graphs // Inverse Problems. 2005. Vol. 21. P. 1075–1086.

3. *Юрко В.А.* Обратная задача для операторов Штурма—Лиувилля на произвольных компактных пространственных сетях // ДАН. 2010. Т. 432, № 3. С. 318–321.

4. *Freiling G., Yurko V.A.* Inverse problems for differential operators with singular boundary conditions // Mathematishe Nachrichten. 2005. Vol. 278, № 12–13. P. 1561–1578.