функции $F^M(p,q)$ в точке $(0,0)$, получим

$$\frac{d(x_3)_{pp}}{dt}\Big|_{(p,q)=(0,0)} = 8(x_1)_p(1-\alpha)(u_1)_p - 16(x_2)_p(1-\alpha) + 8(t-1)(u_1)_p^2, \quad (x_3)_{pp}(0)=0, \tag{5}$$

$$\frac{d(x_3)_{qq}}{dt}\Big|_{(p,q)=(0,0)} = 8(x_1)_q(1-\alpha)(u_1)_q + 8(t-1)(u_1)_q^2, \quad (x_3)_{qq}(0)=0. \tag{6}$$

Оптимальная управляющая функция u_1 удовлетворяет принципу максимума Понтрягина, т.е. при всех (p,q) является корнем уравнения

$$H_u(t,x,\Psi,u)=0.$$

Дифференцируя последнее равенство по p и q, находим, что

$$(u_1)_p = -\frac{(\Psi_1)_p + 2(x_1)_p(1-\alpha)}{4(t-1)}, \qquad (u_1)_q = -\frac{(\Psi_1)_q + 2(x_1)_q(1-\alpha)}{4(t-1)}.$$

Вычисляя далее частные производные функций x_1, x_2, Ψ_1 по переменным p и q, элементарными средствами дифференциального исчисления решения задач на экстремум из равенств (5) и (6) получим утверждение теоремы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Захаров А.М., Прохоров Д.В.* Седловые точки множества начальных коэффициентов однолистных функций // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун.-та, 2003. Вып. 5. С. 33–36.

2. *Прохоров Д.В.* Множества значений систем функционалов в классах однолистных функций // Мат. сб. 1990. Т. 181, № 12. С. 1659–1667.

УДК 517.518.82

С.И. Дудов, Е.В. Сорина

СРАВНЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВНЕШНЕЙ ОЦЕНКЕ СЕГМЕНТНОЙ ФУНКЦИИ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ПОЛОСОЙ С ЗАДАЧЕЙ БЛ. СЕНДОВА

Пусть сегментная функция (с.ф.) $F(t) = [f_1(t), f_2(t)]$ задана на отрезке $[c,d]$ двумя непрерывными функциями $f_1(t)$ и $f_2(t)$, причём $f_1(t) \le f_2(t)$ при $t \in [c,d]$. Далее под $P_n(A,t) = a_0 + a_1t+$

$+ \ \ldots + a_n t^n$ понимаем полином степени n с вектором коэффициентов $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Рассмотрим задачу

$$\rho(A) \equiv \max_{t\in[c,d]} \max\{P_n(A,t) - f_1(t), f_2(t) - P_n(A,t)\} \to \min_{A\in\mathbb{R}^{n+1}}, \quad (1)$$

геометрическое толкование которой заключается в построении полиномиальной полосы наименьшей (по ординате) ширины, содержащей график с.ф. $F(t)$. ([1]).

Величина $\max\{P_n(A,t) - f_1(t), f_2(t) - P_n(A,t)\}$, задействованная в определении целевой функции $\rho(A)$, выражает расстояние Хаусдорфа между сегментом $F(t) = [f_1(t), f_2(t)]$ и значением полинома $P_n(A,t)$. Поэтому возникает причина для сравнения задачи (1) с задачей наилучшего приближения графика сегментной функции графиком полинома заданной степени в метрике Хаусдорфа двумерного пространства. Эта задача исследовалась Бл.Сендовым и рядом болгарских математиков (см. [2]), а также Е.П. Долженко, Е.А. Севастьяновым, работы которых упоминаются в [2]. Постановка этой задачи имеет вид

$$h(grF(\cdot), grP_n(A,\cdot)) \quad \to \quad \min_{A\in\mathbb{R}^{n+1}}. \quad (2)$$

Здесь под $grF(\cdot)$ и $grP_n(A,\cdot)$ понимаются графики сегментной функции $F(\cdot)$ и полинома $P_n(A,\cdot)$ на отрезке $[c,d]$:

$$grF(\cdot) = \{z = (t,x) \in \mathbb{R}^2 : t \in [c,d], x \in [f_1(t), f_2(t)]\},$$

$$grP_n(A,\cdot) = \{z = (t,x) \in \mathbb{R}^2 : t \in [c,d], x = P_n(A,t)\},$$

а $h(X,Y)$ выражает расстояние Хаусдорфа между множествами X и Y по формуле

$$h(X,Y) = \max\{\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}\mu(x,y), \sup_{y\in Y}\inf_{x\in X}\mu(x,y)\}. \quad (3)$$

При этом по выбору автора [2, с. 7] использовалась метрика

$$\mu(x,y) = \max\{\alpha^{-1}|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}, \quad (4)$$

где $\alpha > 0, x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$.

Пример, приведённый в [2, с. 117-118], показывает что множество решений задачи (2) может быть невыпуклым. Уже это обстоятельство говорит о том, что задача (2), в общем случае, не является задачей выпуклого программирования. Однако, как мы сейчас покажем, выбрав другую, отличную от (4), метрику и наложив некоторое дополнительное условие, можно говорить об эквивалентности этих задач.

Обозначим через $L_\lambda[c,d]$ класс липшицевых функций на отрезке $[c,d]$ с константой Липшица $\lambda > 0$.

Теорема. *Пусть* $P_n(A,t), f_1(t), f_2(t) \in L_{\lambda_0}[c,d]$. *Тогда, если заменить в (3) метрику (4) на*

$$\mu(x,y) = \lambda|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \tag{5}$$

то для любого $\lambda \geq \lambda_0$ *выполняется равенство*

$$\rho(A) = h(grF(\cdot), grP_n(A,\cdot)). \tag{6}$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$h(grF(\cdot), grP_n(A,\cdot)) = \max\{h(grf_1(\cdot), grP_n(A,\cdot),\\ h(grf_2(\cdot), grP_n(A,\cdot)\}. \tag{7}$$

Распишем более подробно, используя специфику метрики (5)

$$h(grf_1(\cdot), grP_n(A,\cdot)) =\\ = \max\{\sup_{x\in grf_1(\cdot)} \inf_{y\in grP_n(A,\cdot)} \mu(x,y), \sup_{y\in grP_n(A,\cdot)} \inf_{x\in grf_1(\cdot)} \mu(x,y)\} =\\ = \max\{\sup_{t\in[c,d]} \inf_{\xi\in[c,d]} \{\lambda|t-\xi| + |f_1(t) - P_n(A,\xi)|\},\\ \sup_{t\in[c,d]} \inf_{\xi\in[c,d]} \{\lambda|t-\xi| + |P_n(A,t) - f_1(\xi)|. \tag{8}$$

В силу липшицевости функции $f_1(t)$ имеем:

$$|P_n(A,t) - f_1(\xi)| = |P_n(A,\xi) - f_1(t) + f_1(t) - f_1(\xi)| \geq\\ \geq |P_n(A,t) - f_1(t)| - |f_1(t) - f_1(\xi)| \geq |P_n(A,t) - f_1(t)| - \lambda|t-\xi|,$$

или

$$\lambda|t-\xi| + |P_n(A,t) - f_1(\xi)| \geq |P_n(A,t) - f_1(t)|.$$

По этой причине

$$\inf_{t\in[c,d]} \{\lambda|t-\xi| + |P_n(A,t) - f_1(\xi)|\} = |P_n(A,t) - f_1(t)|. \tag{9}$$

По аналогии, используя липшицевость полинома $P_n(A,t)$, получаем соответственно

$$\inf_{\xi\in[c,d]}\{\lambda|t-\xi|+|f_1(t)-P_n(A,\xi)|\}=|f_1(t)-P_n(A,t)|. \qquad (10)$$

Подставляем (9)–(10) в (8):

$$h(grf_1(\cdot),grP_n(A,\cdot))=\sup_{t\in[c,d]}\{|f_1(t)-P_n(A,t)|\}=$$
$$=\max_{t\in[c,d]}\{|f_1(t)-P_n(A,t)|\}. \qquad (11)$$

По аналогичной причине

$$h(grf_2(\cdot),grP_n(A,\cdot)) = \max_{t\in[c,d]}\{|f_2(t) - P_n(A,t)|\}. \qquad (12)$$

Наконец, подставив (11)-(12) в (7), получаем

$$h(grf_1(\cdot),grP_n(A,t))=$$
$$=\max\{\max_{t\in[c,d]}|f_1(t)-P_n(A,t)|,\max_{t\in[c,d]}|f_2(t)-P_n(A,t)|\}=$$
$$=\max_{t\in[c,d]}\max\{|f_1(t)-P_n(A,t)|,|f_2(t)-P_n(A,t)|\}. \qquad (13)$$

Но поскольку $f_1(t)\le f_2(t)$ для всех $t\in[c,d]$, то

$$\max\{|f_1(t)-P_n(A,t)|,|f_2(t)-P_n(A,t)|\}=$$
$$=\max\{P_n(A,t)-f_1(t),f_2(t)-P_n(A,t)\}.$$

Поэтому из (12) получаем (6).

Теорема доказана.

Таким образом, на основании доказанной теоремы можем сделать следующий вывод.

Если сегментная функция задаётся липшицевыми функциями $f_1(t)$ и $f_2(t)$, то при выборе достаточно большого значения λ , которым определяется метрика (5), задачи (1) и (2) становятся эквивалентными. Понятно, что оценка снизу этих значений λ зависит от константы Липшица для $f_1(t)$ и $f_2(t)$. Однако получение этой оценки требует дополнительного исследования.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-4383.2010.1) и РФФИ (проект 10-01-00270).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Выгодчикова И.Ю., Дудов С.И., Сорина Е.В.* Внешняя оценка сегментной функций полиномиальной полосой // ЖВМ и МФ. 2009. Т. 49, № 7. С. 1175–1183.

2. *Сендов Бл.* Хаусдорфовые приближения. София, 1979.

УДК 517.984

М.Ю. Игнатьев

О ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ НА ПРОСТЕЙШЕМ НЕКОМПАКТНОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ С ЦИКЛОМ

Пусть G – геометрический граф с вершиной v_1 и ребрами r_0, r_1, где r_0 – луч с началом в v_1, r_1 – цикл $[v_1, v_1]$ длины π. Будем считать, что ребро r_0 параметризовано параметром $x_0 \in [0, \infty)$, а r_1 – параметром $x_1 \in [0, \pi]$. Функцию y на графе G будем трактовать как пару функций $(y_0(x_0), y_1(x_1))$.

На каждом из $r_j (j = 0, 1)$ рассмотрим дифференциальное выражение:

$$\ell_j y_j = -y_j'' + q_j(x_j) y_j \tag{1}$$

с вещественными потенциалами $q_j \in L(r_j)$, $(1 + x_0)\, q_0(x_0) \in L(0, \infty)$.

Обозначим через $C_j(x_j, \lambda)$, $S_j(x_j, \lambda)$ решения уравнений $\ell_j y = \lambda y$ с начальными условиями типа косинуса и синуса соответственно, через $e_0(x_0, \rho)$ – решение Йоста на ребре r_0.

Пусть Λ – множество собственных значений действующего в $L_2(G)$ оператора, порожденного дифференциальными выражениями (1) и следующими (*стандартными*) условиями склейки:

$$y_0(0) = y_1(0) = y_1(\pi), \quad y_1'(\pi) = y_0'(0) + y_1'(0). \tag{2}$$

Обозначим: Λ_0 – множество собственных значений оператора, порожденного в $L_2(0, \infty)$ выражением $\ell_0 y$ и краевым условием $y(0) = 0$, Λ_1 – спектр оператора, порожденного $\ell_1 y$ и краевыми условиями Дирихле $y(0) = y(\pi) = 0$, Λ_2 – спектр оператора, порожденного $\ell_1 y$ и периодическими краевыми условиями. Через $d_1(\lambda)$, $D_1(\lambda)$ обозначим характеристические функции:

$$d_1(\lambda) := S_1(\pi, \lambda), \quad D_1(\lambda) := 2 - C_1(\pi, \lambda) - S_1'(\pi, \lambda).$$

В силу самосопряженности всех введенных в рассмотрение операторов $\Lambda, \Lambda_\nu \subset \mathbb{R}$, $\nu = \overline{0, 2}$. Представим Λ как объединение положительной и