БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Выгодчикова И.Ю., Дудов С.И., Сорина Е.В.* Внешняя оценка сегментной функций полиномиальной полосой // ЖВМ и МФ. 2009. Т. 49, № 7. С. 1175–1183.

2. *Сендов Бл.* Хаусдорфовые приближения. София, 1979.

УДК 517.984

М.Ю. Игнатьев

О ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ НА ПРОСТЕЙШЕМ НЕКОМПАКТНОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ С ЦИКЛОМ

Пусть G – геометрический граф с вершиной v_1 и ребрами r_0, r_1, где r_0 – луч с началом в v_1, r_1 – цикл $[v_1, v_1]$ длины π. Будем считать, что ребро r_0 параметризовано параметром $x_0 \in [0, \infty)$, а r_1 – параметром $x_1 \in [0, \pi]$. Функцию y на графе G будем трактовать как пару функций $(y_0(x_0), y_1(x_1))$.

На каждом из $r_j (j = 0, 1)$ рассмотрим дифференциальное выражение:

$$\ell_j y_j = -y_j'' + q_j(x_j) y_j \tag{1}$$

с вещественными потенциалами $q_j \in L(r_j)$, $(1 + x_0)\, q_0(x_0) \in L(0, \infty)$.

Обозначим через $C_j(x_j, \lambda)$, $S_j(x_j, \lambda)$ решения уравнений $\ell_j y = \lambda y$ с начальными условиями типа косинуса и синуса соответственно, через $e_0(x_0, \rho)$ – решение Йоста на ребре r_0.

Пусть Λ – множество собственных значений действующего в $L_2(G)$ оператора, порожденного дифференциальными выражениями (1) и следующими (*стандартными*) условиями склейки:

$$y_0(0) = y_1(0) = y_1(\pi), \quad y_1'(\pi) = y_0'(0) + y_1'(0). \tag{2}$$

Обозначим: Λ_0 – множество собственных значений оператора, порожденного в $L_2(0, \infty)$ выражением $\ell_0 y$ и краевым условием $y(0) = 0$, Λ_1 – спектр оператора, порожденного $\ell_1 y$ и краевыми условиями Дирихле $y(0) = y(\pi) = 0$, Λ_2 – спектр оператора, порожденного $\ell_1 y$ и периодическими краевыми условиями. Через $d_1(\lambda)$, $D_1(\lambda)$ обозначим характеристические функции:

$$d_1(\lambda) := S_1(\pi, \lambda), \quad D_1(\lambda) := 2 - C_1(\pi, \lambda) - S_1'(\pi, \lambda).$$

В силу самосопряженности всех введенных в рассмотрение операторов $\Lambda, \Lambda_\nu \subset \mathbb{R}$, $\nu = \overline{0, 2}$. Представим Λ как объединение положительной и отрицательной частей: $\Lambda = \Lambda^+ \cup \Lambda^-$, $\Lambda^+ := \Lambda \cap [0, \infty)$, аналогично $\Lambda_\nu = \Lambda_\nu^+ \cup \Lambda_\nu^-$, $\nu = 1, 2$.

Всюду далее предполагаются выполненными следующие условия:

Условие 1. $\Lambda_0 \cap \Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$*;*

Условие 2. $\Lambda^- \cap \left(\Lambda_2^- \setminus \Lambda_1^-\right) = \emptyset$.

Теорема 1. $\Lambda^+ = \Lambda_1^+ \cap \Lambda_2^+$.

Определим

$$a(\rho) := D_1(\lambda) e_0(0, \rho) + d_1(\lambda) e_0'(0, \rho),$$

$$Z = \{\rho : Im\rho > 0, a(\rho) = 0\}.$$

Теорема 2. Λ^- *– конечное множество, совпадающее с множеством* $\left\{\rho^2 : \rho \in Z\right\}$.

Пусть $\psi(x, \rho) = (\psi_0(x_0, \rho), \psi_1(x_1, \rho))$ – решение уравнения $\ell_j \psi_j = \rho^2 \psi_j, j = 0, 1$, $Im\rho > 0$, удовлетворяющее условиям склейки (2), нормированное асимптотикой

$$\psi_0(x_0, \rho) = \exp(-i\rho x_0)(1 + o(1)), \quad x_0 \to \infty.$$

Теорема 3. $\psi_0(x_0, \rho)$ *мероморфна в верхней полуплоскости* $\{Im\rho > 0\}$*. При всех вещественных* $\rho \neq 0$ *существуют предельные значения* $\psi_0(x_0, \rho) := \lim_{\varepsilon \to +0} \psi_0(x_0, \rho + i\varepsilon)$*. При* $\rho \to 0$ $\psi_0(x_0, \rho)$ *ограничена.*

При $\rho \in \mathbb{R}, \rho \neq 0$, *справедлива асимптотика*

$$\psi_0(x_0, \rho) = \exp(-i\rho x_0) + s(\rho) \exp(i\rho x_0) + o(1), \quad x_0 \to \infty.$$

Коэффициент $s(\rho)$ $(\rho \in \mathbb{R})$ будем называть *коэффициентом отражения.*

Обозначим $Z_0 := \left\{\rho \in Z : \rho^2 \in \Lambda^- \setminus (\Lambda_1 \cap \Lambda_2)\right\}$.

Теорема 4. *Множество полюсов функции* $\psi_0(x_0, \rho)$ *совпадает с* Z_0*. Все полюса простые, и справедливо представление:*

$$\lim_{\rho \to \rho_0} (\rho - \rho_0) \psi_0(x_0, \rho) = \psi_{\langle -1 \rangle}(x_0, \rho_0), \quad \rho_0 \in Z_0,$$

$$\psi_{\langle -1 \rangle}(x_0, \rho_0) = \alpha(\rho_0) \exp(i\rho_0 x_0)(1 + o(1)), x_0 \to \infty.$$

Коэффициенты $\alpha(\rho_0), \rho_0 \in Z_0$ будем называть *весовыми числами.*

Отметим, что для справедливости теоремы 4 существенны условия 1, 2. В общем случае, если какое-либо из этих условий не выполняется, $\psi_0(x_0, \rho)$ может иметь кратные полюса, что требует отдельного рассмотрения, выходящего за рамки данной статьи.

Следующая теорема показывает, что (при выполнении условий 1, 2) коэффициент отражения, множество Z_0 и весовые числа однозначно определяют потенциал q_0 на луче r_0.

Теорема 5. *Пусть потенциалы* $q(x) = (q_0(x_0), q_1(x_1))$ *и* $\tilde{q}(x) = (\tilde{q}_0(x_0), \tilde{q}_1(x_1))$ *на* G *таковы, что* $s(\rho) = \tilde{s}(\rho), \rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $Z_0 = \tilde{Z}_0$, $\alpha(\rho_0) = \tilde{\alpha}(\rho_0), \rho_0 \in Z_0$. *Тогда* $q_0 = \tilde{q}_0$.

При доказательстве теоремы 5 используются в основном те же идеи, что и при доказательстве теоремы 11.18 в [1] (см. также метод спектральных отображений на полуоси [2]).

Для восстановления потенциала на всем графе нам понадобится все множество Λ и, кроме того, некоторый набор чисел («знаков»), относящийся к периодической задаче на r_1. А именно, пусть $\Lambda_1 = \{\lambda_n^1\}_{n=1}^{\infty}$, где нумерация идет по возрастанию λ_n^1. Тогда [3]:

$$S_1'\left(\pi, \lambda_n^1\right) = \frac{1}{2} F\left(\lambda_n^1\right) + \frac{\omega_n}{2}\sqrt{F^2\left(\lambda_n^1\right) - 4},$$

где $F(\lambda) := C_1(\pi, \lambda) + S_1'(\pi, \lambda)$ – дискриминант Хилла, $\omega_n \in \{-1, 1\}$.

Определение. *Данными рассеяния* называется набор

$$J := \left\{s(\rho), \rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \Lambda, Z_0, \alpha(\rho), \rho \in Z_0, \omega_n, n = \overline{1, \infty}\right\}.$$

Теорема 6. *Из* $J = \tilde{J}$ *следует* $q = \tilde{q}$, *т.е.* $q_0(x_0) = \tilde{q}_0(x_0)$ *п.в. на* $(0, \infty)$, $q_1(x_1) = \tilde{q}_1(x_1)$ *п.в. на* $(0, \pi)$. *Таким образом, задание данных рассеяния однозначно определяет потенциал.*

Первый этап доказательства теоремы 6 – применение теоремы 5. После восстановления $q_0(x_0)$ мы получаем возможность по коэффициенту отражения однозначно восстановить мероморфную функцию $D_1(\lambda)/d_1(\lambda)$, которая определяет нули $D_1(\lambda)$ и $d_1(\lambda)$, не входящие в $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$. Далее, $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ восстанавливается по спектру Λ и множеству Z_0. После чего нам известны все нули $D_1(\lambda)$ и $d_1(\lambda)$ и соответственно сами эти функции. Таким образом, фактически, нам известны дискриминант Хилла, спектр Λ_1 и числа $\omega_n, n = \overline{1, \infty}$. Этого достаточно [3] для однозначного восстановления $q_1(x_1)$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ и Национального научного совета Тайваня (проекты 10-01-00099 и 10-01-92001-ННС).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Beals R., Deift P., Tomei C.* Direct and inverse scattering on the line // Math. Surveys and Monographs. Vol. 28, Amer. Math. Soc, Providence: RI, 1988.

2. *Юрко В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.

3. *Левитан Б.М.* Обратные задачи Штурма—Лиувилля. М.: Наука, 1984.

УДК 517.51

Т.В. Иофина

СИЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ В РАВНОМЕРНОЙ И ГЕЛЬДЕРОВЫХ МЕТРИКАХ

Пусть $\{\chi_j\}_{j=0}^{\infty}$ – система Виленкина, построенная по ограниченной последовательности $\mathbf{P} = \{p_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{N}$ [1, §1.5]. Коэффициенты Фурье и частичная сумма Фурье для $f \in L[0,1)$ задаются формулами $\hat{f}(k) = \int_0^1 f(x)\overline{\chi_k(x)}\,dx$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\chi_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Будем рассматривать пространства $L^p[0,1)$, $1 \le p < \infty$, $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$, и $C^*[0,1)$ – пространство функций, непрерывных относительно $\mathbf{P}$-ичного сдвига, $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1)} |f(x)|$. Пусть $\omega^*(f,\delta)_p = \sup\limits_{0<h<\delta} \|f(x\ominus h) - f(x)\|_p$ – модуль непрерывности в этих пространствах. Будем говорить, что $\omega \in \Omega$, если $\omega(\delta)$ непрерывна и возрастает на [0,1), $\omega(0) = 0$. Тогда $f \in H_p^\omega[0,1)$, если $f \in L_p[0,1)$ $(1 \le p < \infty)$ или $f \in C^*[0,1)$ $(p = \infty)$ и $\omega^*(f,\delta)_p \le C\omega(\delta)$; $\|f\|p,\omega = \|f\|_p + \sup\limits_{0<h<1} \omega^*(f,h)_p/\omega(h)$.

Далее будем считать, что $\omega(t) \in \Omega$ удовлетворяет Δ_2-условию, т.е. $\omega(t) \le C\omega(t/2)$, $t \in [0,1)$. Кроме того, для $\omega(t), \mu(t) \in \Omega$ существует $\alpha \in (0,1)$ такое, что $\omega^\alpha(t)/\mu(t)$ ограничена на [0,1).

Определим класс GM последовательностей $\{d_i\}_{i=0}^{\infty}$, удовлетворяющих неравенству $\sum\limits_{k=m}^{2m-1} |d_k - d_{k+1}| \le Cd_m$. Пусть MRBVS – класс последовательностей $\{d_i\}_{i=0}^{\infty}$, для которых верно $\sum\limits_{k=2m}^{n-1} |d_k - d_{k+1}| \le K \sum\limits_{k=m}^{2m-1} \frac{d_k}{m+1}$, $1 \le m \le \le (n-1)/2$. Эти классы изучались С.Ю. Тихоновым. В частности, им было показано, что квазимонотонные последовательности $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ (такие, что $a_n n^{-\tau} \downarrow 0$ для некоторых $\tau \ge 0$ и $n \in \mathbb{N}$) содержаться в GM. Ему же принадлежит идея доказательства того факта, что данный класс и класс GM не содержат друг друга (см. леммы 1, 2).