БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М.: Наука, 1987.

2. *Szal B.* On the degree of strong approximation of continuous functions by special matrix // J. Inequal. Pure Appl. Math. 2009. Vol. 10(4), № 111.

3. *Иофина Т.В., Волосивец С.С.* Сильная аппроксимация функций в гельдеровых метриках // Современные проблемы теории функций и их применения: материалы 15-й Сарат. зимней шк., посвящ. 125-летию со дня рождения В.В. Голубева и 100-летию СГУ. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. С. 80–81.

УДК 519.852.2

М.Ю. Калмыков

ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧИ КОНИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Рассматривается задача конического программирования, связанная с конусом функций, производные некоторых порядков которых имеют фиксированный знак на [0,1], и доказывается соответствующая теорема двойственности.

Пусть $A \in R^{m\times n}$, $b \in R^m$, $c \in R^n$, $m < n$, $m,n \in N$. Пусть $0 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leqslant 1$. Для $g \in C[0,1]$ обозначим $Ig = (g(x_1),\ldots,g(x_n))$. Пусть $k \geqslant 0$, $\sigma = (\sigma_i)_{i=0}^k$, $\sigma_i \in \{-1,0,1\}$. Пусть $\Delta^p[0,1]$ – множество p-монотонных на $[0,1]$ функций. Напомним, что функция называется *p-монотонной на* $C[0,1]$, если разделенная разность порядка p по любой системе $p+1$ точек из [0,1] является неотрицательной. Следуя [1], рассмотрим конус $\Delta^{0,k}[0,1] := \{f \in C[0,1] : \sigma_p f \in \Delta^p[0,1], \quad 0 \leqslant p \leqslant k\}$. Обозначим $V_{0,k}(\sigma) := \{If \in R^n : f \in \Delta^{0,k}(\sigma)\}$. Двойственный конус имеет вид $V_{0,k}^*(\sigma) := \{y \in R^m : u^T y \geqslant 0, \forall u \in V_{0,k}(\sigma)\}$.

Рассмотрим задачу

$$f(x) := c^T x \to \min_{x\in M}, \quad M := \{x \in R^n : Ax^T = b, \quad x \in V_{0,k}^*(\sigma)\}. \qquad (1)$$

Тогда, согласно [2], двойственная задача будет иметь вид

$$f^*(y) := b^T y \to \max_{y\in M^*}, \quad M^* := \{y \in R^m : A^T y + s = c, \quad s \in V_{0,k}(\sigma)\}. \qquad (2)$$

Обозначим $\|A\|_\infty := \max_i \sum_j | a_{ij} |$.

Лемма. *Множество* $Q := \{Ax^T, x \in V_{0,k}^*(\sigma)\}$ *является непустым, замкнутым и выпуклым.*

Доказательство. Ясно, что Q выпукло. Более того, так как $0 \in Q$, очевидно, что Q есть непустое множество. Теперь остается показать, что множество Q замкнуто. Пусть q^k – последовательность в Q такая, что $q^k \to q$. Наша цель показать, что $q \in Q$. Рассмотрим задачу оптимизации: $\min\limits_{x \in V_{0,k}^*(\sigma)} \parallel q - Ax^T \parallel_\infty$, которую можно переписать следующим образом:

$$\min t,$$

$$t \geqslant q_i - (Ax)_i, \forall i = 1, \dots, n,$$

$$t \geqslant -q_i + (Ax)_i, \forall i = 1, \dots, n,$$

$$x \in V_{0,k}(\sigma) \Leftrightarrow \langle x, v_i^* \rangle \geqslant 0,$$

где $v_i \in V_{0,k}(\sigma)$ – крайние лучи конуса $V_{0,k}(\sigma)$.

Заметим, что данная система является нелинейным полиэдром. Отсюда, согласно [2], существует оптимальное решение (x^*, t^*) такое, что $t^* \geqslant 0$. Мы утверждаем, что $t^* = 0$. Предположим, что $t^* > 0$. Тогда, так как $q^k \to q$, существует индекс $k^{'}$ такой, что $\parallel q - q^{k^{'}} \parallel_\infty = t^{'} < t^*$, так как $q^{k^{'}} \in Q$, существует $x^{'} \in V_{0,k}^*(\sigma)$ такое, что $y^{K^{'}} = A(x^{'})^T$. Откуда следует, что $(x^{'}, t^{'})$ является возможным решением этой системы, что противоречит оптимальному решению (x^*, t^*). Таким образом, мы имеем $t^* = 0$, из этого следует, что $q = A(x^*)^T$, то есть $q \in Q$.

Будем писать $u \succcurlyeq_{V_{0,k}(\sigma)} v$, если $u - v \in V_{0,k}(\sigma)$.

Лемма. *Пусть* $A \in R^{m \times n}, b \in R^m$, *тогда только одна из следующих систем имеет решение:*

$$Ax^T = b^T, x \in V_{0,k}^*(\sigma), \tag{3}$$

$$-A^T y^T \succcurlyeq_{V_{0,k}(\sigma)} 0, b^T y > 0. \tag{4}$$

Доказательство. Предположим противное, пусть $x_* \in R^n$ – решение (**??**), а $y_* \in R^m$ – решение (**??**). Так как $y_* A \in (-V_{0,k}(\sigma))$, а $x_* \in V_{0,k}^*(\sigma)$ и

$$-V_{0,k}^*(\sigma) := \{u : \ -u \in V_{0,k}^*(\sigma)\}, \tag{5}$$

то $0 \geqslant (y_* A) x_*^T = y_*(A x_*^T) = y_* b^T > 0$, мы получаем противоречие. Теперь остается показать, что если (**??**) не имеет решения, то (**??**) имеет решение. Рассмотрим непустое замкнутое и выпуклое множество $Q = \{Ax^T, x \in V^*_{0,k}(\sigma)\}$. Так как (**??**) не имеет решения, то мы имеем $b^T \notin Q$. Применяя теорему отделимости, получаем, что существует $y \in R^m$ такой, что $yAx^T < yb^T, \quad \forall x \in V^*_{0,k}(\sigma)$. Так как $0 \in Q$, то $b^T y > 0$. Таким образом, мы имеем, что $b^T y > 0$ и в силу (**??**) $(-A^T y^T) \succcurlyeq_{V_{0,k}(\sigma)} 0$. Покажем, что $(-A^T y) \succcurlyeq_{V_{0,k}(\sigma)} 0$. Предположим, что это не так. Тогда существует крайний луч $v_i \in V^*_{0,k}(\sigma)$ такой, что $(A^T y)v_i > 0$. Рассмотрим вектор $x' = \lambda v_i$, где $\lambda > 0$, и v_i – крайний луч. Очевидно, что $x' \in V^*_{0,k}(\sigma)$. Кроме того, имеем $y^T b > y^T A x' = \lambda(A^T y v_i)$ для всех $\lambda > 0$, что невозможно. Следовательно, мы имеем $-A^T y^T \succcurlyeq_{V_{0,k}(\sigma)} 0$.

Теорема 1 (о слабой двойственности). *Пусть $x_* \in R^n$ – возможное решение для* (**??**), *а $y_* \in R^m$ – возможное решение для* (**??**). *тогда мы имеем*

$$b^T y_* \leqslant c^T x_*. \tag{6}$$

Доказательство. Достаточно заметить, что $b^T y_* = x_*^T A^T y_* \leqslant x_*^T(A^T y_* + s) = x_*^T c$, где $s \geqslant 0, \quad x_* \in V^*_{0,k}(\sigma), \quad A^T y_* + s = c$ по определению.

Теорема 2 (о сильной двойственности). *Предположим, что задача* (**??**) *имеет оптимальное решение $x_* \in R^n$, тогда задача* (**??**) *также имеет оптимальное решение $y_* \in R^m$, причем*

$$b^T y_* = c^T x_*. \tag{7}$$

Доказательство. Предположим, что задача (**??**) имеет оптимальное решение $x_* \in R^n$. Мы утверждаем, что система

$$Ax - bt = 0, \quad c^T x - (c^T x_*)t = -1 < 0, \quad x \in V^*_{0,k}(\sigma), \quad t \geqslant 0, \tag{8}$$

не должна иметь решения (x, t).

Конечно, если (x', t') – возможное решение этой системы, $t' > 0$, то (x'/t') – возможное решение для (**??**), и $c^T(x'/t') < c^T x_*$, что противоречит оптимальности x_*. С другой стороны, если $t' = 0$, то $x_* + x'$ – возможное решение для (**??**), и $c^T(x_* + x')$, согласно (8), равно $c^T x_* - 1 < c^T x_*$, что снова противоречит оптимальности x_*.

Существует [2] $y_* \in R^m$ такое, что $c - A^T y_* \geqslant 0$ и $-c^T x_* + b^T y_* \geqslant 0$. из этого следует, что y_* – возможное решение для (**??**). Более того, по теореме 1 мы имеем $b^T y_* \leqslant c^T x_*$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Muñoz-Delgado F.J., Ramírez-González V., Cárdenas-Morales"D.* Qualitative Korovkin-type results on conservative approximation // J. Approx. Theory. 1998. Vol. 94. P. 144–159.

2. *Shapiro A.* On duality theory of conic linear problems: Semi-Infinite Programming: Recent Advances. Kluwer Academic Publishers, 2002.

УДК 519.852.2

М.Ю. Калмыков, С.П. Сидоров

УСЛОВИЯ ПУСТОТЫ ДОПУСТИМОГО МНОЖЕСТВА ОДНОЙ ЗАДАЧИ КОНИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рассматривается задача конического линейного программирования. Показано, что при выполнении некоторых условий на коэффициенты системы ограничений допустимое множество этой задачи будет пустым.

Пусть $0 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leqslant 1$, $If = (f(x_1), \ldots, f(x_n)) \in \mathbb{R}^n$, $f \in C[0,1]$.

Говорят, что функция $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ является p-монотонной, $p \geq 1$, на отрезке $[0,1]$, если для произвольных $p+1$ различных точек $t_0, \ldots, t_p$ из $[0,1]$ выполняется неравенство

$$[t_0, \ldots, t_p]f \geq 0,$$

где $[t_0, \ldots, t_p]f = \sum_{j=0}^{p}(f(t_j)/w'(t_j))$ означает дифференциальную разность порядка p функции f по узлам $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_p \leq 1$, и $w(t) = \prod_{j=0}^{p}(t - t_j)$.

Заметим, что 2-монотонные функции есть выпуклые функции. Множество всех p-монотонных функций, определенных на $[0,1]$, обозначим $\Delta^p[0,1]$. Если $f \in C^p[0,1]$, то $f \in \Delta^p[0,1]$ тогда и только тогда, когда $f^{(p)}(t) \geq 0$, $t \in [0,1]$. Обозначим $\Delta^0[0,1] := \{f \in C[0,1] : f(t) \geq 0,\ t \in [0,1]\}$.

Пусть $k = 0$, $\sigma = (\sigma_0, \ldots, \sigma_k) \in R^{k+1}$, $\sigma_i \in \{-1, 0, 1\}$, $\sigma_0\sigma_k \neq 0$, $k \geq 1$. Следуя [1], положим

$$\Delta^{0,k}(\sigma) := \{f \in C[0,1] :\ \sigma_p f \in \Delta^p[0,1],\ 0 \leq p \leq k\}$$

и рассмотрим конус

$$V_{0,k}(\sigma) := \{If :\ f \in \Delta^{0,k}(\sigma)\} \subset \mathbb{R}^n.$$