БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Muñoz-Delgado F.J., Ramírez-González V., Cárdenas-Morales"D.* Qualitative Korovkin-type results on conservative approximation // J. Approx. Theory. 1998. Vol. 94. P. 144–159.

2. *Shapiro A.* On duality theory of conic linear problems: Semi-Infinite Programming: Recent Advances. Kluwer Academic Publishers, 2002.

УДК 519.852.2

М.Ю. Калмыков, С.П. Сидоров

УСЛОВИЯ ПУСТОТЫ ДОПУСТИМОГО МНОЖЕСТВА ОДНОЙ ЗАДАЧИ КОНИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рассматривается задача конического линейного программирования. Показано, что при выполнении некоторых условий на коэффициенты системы ограничений допустимое множество этой задачи будет пустым.

Пусть $0 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leqslant 1$, $If = (f(x_1), \ldots, f(x_n)) \in \mathbb{R}^n$, $f \in C[0,1]$.

Говорят, что функция $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ является p-монотонной, $p \geq 1$, на отрезке $[0,1]$, если для произвольных $p+1$ различных точек $t_0, \ldots, t_p$ из $[0,1]$ выполняется неравенство

$$[t_0, \ldots, t_p]f \geq 0,$$

где $[t_0, \ldots, t_p]f = \sum_{j=0}^{p}(f(t_j)/w'(t_j))$ означает дифференциальную разность порядка p функции f по узлам $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_p \leq 1$, и $w(t) = \prod_{j=0}^{p}(t - t_j)$.

Заметим, что 2-монотонные функции есть выпуклые функции. Множество всех p-монотонных функций, определенных на $[0,1]$, обозначим $\Delta^p[0,1]$. Если $f \in C^p[0,1]$, то $f \in \Delta^p[0,1]$ тогда и только тогда, когда $f^{(p)}(t) \geq 0$, $t \in [0,1]$. Обозначим $\Delta^0[0,1] := \{f \in C[0,1] : f(t) \geq 0,\ t \in [0,1]\}$.

Пусть $k = 0$, $\sigma = (\sigma_0, \ldots, \sigma_k) \in R^{k+1}$, $\sigma_i \in \{-1, 0, 1\}$, $\sigma_0\sigma_k \neq 0$, $k \geq 1$. Следуя [1], положим

$$\Delta^{0,k}(\sigma) := \{f \in C[0,1] :\ \sigma_p f \in \Delta^p[0,1],\ 0 \leq p \leq k\}$$

и рассмотрим конус

$$V_{0,k}(\sigma) := \{If :\ f \in \Delta^{0,k}(\sigma)\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Обозначим
$$V_{0,k}^*(\sigma) = \{u \in \mathbb{R}^n : \ \langle u, v\rangle \geq 0 \ \forall v \in V_{0,k}\},$$
где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение, конус, двойственный к конусу $V_{0,k}(\sigma)$.

В дальнейшем без потери общности будем полагать $\sigma_0 = 1$.

Пусть $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ и матрица $A : \mathbb{R}^{m\times n}$ такова, что $\operatorname{rank} A = m < n$. Рассмотрим задачу конического программирования:
$$\inf_{x \in V_{0,k}^*(\sigma)} \{\langle c, x\rangle : \ Ax = b\}. \tag{1}$$

Обзор задач и результатов теории конического программирования можно найти в книге [2].

Обозначим $e_r(t) = t^r$, $r = 0, 1, \ldots$, $t \in [0, 1]$.

Теорема. *Пусть* $2 \leq k \leq n-1$ *(при* $k = 2$ *полагаем* $\sigma_0\sigma_2 = 1$*),* $\zeta \in [0, 1]$. *Если*
$$A = (e_p(x_i))_{p=0,i=1}^{k,n}, \ b = (e_0(\zeta), \ldots, e_k(\zeta))^T,$$
то допустимое множество задачи (1) будет пустым, т.е.
$$\{v \in V_{0,k}^*(\sigma) : \ Ax = b\} = \varnothing.$$

Доказательство. Необходимо показать, что множество векторов $v \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условиям

1) $\langle v, If\rangle \geq 0$ для всех $f \in \Delta^{0,k}(\sigma)$;

2) $\langle v, Ie_p\rangle = e_p(\zeta)$ для всех $p = 0, \ldots, k$,

является пустым.

Возьмем алгебраический полином p степени k таким образом, чтобы выполнялись условия

1) $\sigma_k p \in \Delta^k[0, 1]$;

2) $p(x) > 0$, $x \in [0, 1] \setminus (x_{l-1}, x_l)$;

3) $p(x) < 0$, $x \in (x_{l-1}, x_l)$,

где $x_{l-1} < \zeta < x_l$.

Обозначим
$$\Gamma(\zeta) := \{0 \leq i \leq n-k : \ \zeta \in [x_{i+1}, x_{i+k}] \text{ and } \sigma_k \prod_{j=1}^{k} (\zeta - x_{i+j}) < 0\}.$$

Пусть натуральное число $s \in \Gamma(\zeta)$ будет таким, что

$$\sigma_k[x_{s+1}, \ldots, x_{s+k}, \zeta]p \prod_{i=1}^{k} |\zeta - x_{s+i}| =$$

$$= \min_{j \in \Gamma(\zeta)} \sigma_k \, [x_{j+1}, \ldots, x_{j+k}, \zeta]p \prod_{i=1}^{k} |\zeta - x_{j+i}|.$$

Обозначим: $L_p f(\cdot; y_0, y_1, \ldots, y_p)$ – интерполяционный полином Ньютона функции f по узлам $y_0, y_1, \ldots, y_p$:

$$L_p f(x; y_0, y_1, \ldots, y_p) = \sum_{j=0}^{p} [y_0, \ldots, y_j] f \cdot \prod_{i=-1}^{j-1} (x - y_i), \quad x - y_{-1} := 1.$$

Обозначим

$$p^*(x) := \begin{cases} p(x), \ x \in [0,1] \setminus (x_{l-1}, x_l), \\ L_{k-1} p(x; x_{s+1}, \ldots, x_{s+k}), \ [x_{l-1}, x_l] \end{cases}$$

и

$$q := p^* + L_{k-1} p(\zeta; x_{s+1}, \ldots, x_{s+k}).$$

Тогда будет $q \in \Delta^{0,k}[0,1]$ и для произвольного $v \in V^*_{0,k}(\sigma)$ имеет место $\langle v, Iq \rangle = p(\zeta) < 0$, что невозможно.

Теорема доказана.

Замечание. *Утверждение теоремы не будет иметь место, если взять $k = 2$ и $\sigma_0 \sigma_2 = -1$. Действительно, пусть $x_{l-1} < \zeta < x_l$, тогда вектор v, определенный следующим образом*

$$\langle v, If \rangle = \begin{cases} L_2(\zeta; x_{l-1}, x_l, x_{l+1}), \ \textit{if} \ \ 0 \le l \le n-1, \\ L_2(\zeta; x_{l-2}, x_{l-1}, x_l), \ \textit{if} \ \ n-1 \le l \le n, \end{cases}$$

обладает свойствами:

1) $A(If) \ge 0$ для всех $f \in \Delta^{0,2}(\sigma)$;

2) $A(Ie_p) = e_p(\zeta)$ для всех $p = 0, 1, 2$.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-4383.2010.1) и РФФИ (проект 10-01-00270).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Muñoz-Delgado F.J., Ramírez-González V., Cárdenas-Morales"D.* Qualitative Korovkin-type results on conservative approximation // J. Approx. Theory. 1998. Vol. 94. P. 144-159.

2. *Shapiro A.* On duality theory of conic linear problems / M. A. Goberna, M. A. Lŕopez, eds.: Semi-Infinite Programming: Recent Advances. Kluwer Academic Publishers, 2002.

УДК 517.984

В.В. Корнев

О РЕЗОЛЬВЕНТЕ ОПЕРАТОРА ИНТЕГРИРОВАНИЯ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Рассмотрим оператор

$$Af = \int\limits_0^{\theta(x)} f(t)\,dt, \quad 0 \le x \le 1,$$

где $\theta(x)$ — инволюция (т.е. $\theta(\theta(x)) \equiv x$), удовлетворяющая условиям: $\theta(x)$ непрерывна, $\theta(0) = 1$, $\theta(1) = 0$, $\theta(x) \in C^3(0,1)$ и в некоторой δ-окрестности нуля $\theta'(x) = -x^\alpha r(x)$, $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to 0} r(x) > 0$.

В случае $r(x) \equiv 1$ в работе [1] была доказана равносходимость разложений суммируемых функций по собственным функциям оператора A и тригонометрических рядов Фурье. Важным этапом в доказательстве этого факта является исследование поведения резольвенты Фредгольма

$$y(x) = (E - \lambda A)^{-1} Af$$

(E — единичный оператор, λ — комплексный параметр) в окрестности точек $x = 0$ и $x = 1$, так как в этих точках дифференциальные уравнения резольвенты имеют особенность. В частности, было показано, что в окрестности нуля

$$y(\delta t) = (c_1 + g_1(t))x_{11}(t) + (c_2 + g_2(t))x_{12}(t),$$

где c_1, c_2 — константы, не зависящие от t, $g_1(t)$ — линейная комбинация первообразных для функций $x_{22}(t)f(\theta(\delta t))\theta'(\delta t)$ и $x_{12}(t)f(\delta t)$, $g_2(t)$ — линейная комбинация первообразных для функций $x_{21}(t)f(\theta(\delta t))\theta'(\delta t)$ и $x_{11}(t)f(\delta t)$. Функции $x_{ij}(t)$, $i,j = 1,2$, образуют фундаментальную