УДК 519.4

В.А. Молчанов

ОТНОШЕНИЯ ГРИНА НА ПОЛУГРУППАХ НЕСТАНДАРТНЫХ СЛОВ

В работе [1] разработан нестандартный подход к теории псевдомногообразий, который позволяет характеризовать псевдомногообразия в терминах нестандартных тождеств с помощью нестандартных слов над конечным алфавитом.

Для конечного множества $A = \{x_1, \dots, x_m\}$ символом $W = W(A)$ обозначим полугруппу слов над алфавитом A с операцией конкатенации. По принципу переноса нестандартное расширение ${}^*W = {}^*W(A)$ полугруппы W является полугруппой всех нестандартных слов над алфавитом A с операцией конкатенации. Слово $w \in {}^*W$ называется *конечным*, если $w \in W$, и *бесконечным* в противном случае. Символом $W^1 = W(A)^1$ обозначим моноид слов над алфавитом A с операцией конкатенации, единичным элементом которого является пустое слово Λ. Тогда ${}^*W^1 = {}^*W(A)^1$ – моноид всех нестандартных слов над алфавитом A с операцией конкатенации и единичным элементом Λ.

Как известно [2], каждый элемент $w \in {}^*W$ порождает в полугруппе ${}^*W$ двусторонний главный идеал $I(w) = {}^*W^1 \cdot w \cdot {}^*W^1$, правый главный идеал $R(w) = w \cdot {}^*W^1$ и левый главный идеал $L(w) = {}^*W^1 \cdot w$. С помощью этих идеалов на полугруппе ${}^*W(A)$ определяются отношения Грина $\leq_{\mathcal{J}}$, $\leq_{\mathcal{R}}$ и $\leq_{\mathcal{L}}$ по формулам: $u \leq_{\mathcal{J}} v \Leftrightarrow I(u) \subset I(v)$, $u \leq_{\mathcal{R}} v \Leftrightarrow R(u) \subset R(v)$ и $u \leq_{\mathcal{L}} v \Leftrightarrow L(u) \subset L(v)$. Очевидно, что эти отношения являются квазипорядками на множестве ${}^*W$, соответствующие симметричные части которых — отношения Грина $\mathcal{J} = \leq_{\mathcal{J}} \cap \overset{-1}{\leq}_{\mathcal{J}}$, $\mathcal{R} = \leq_{\mathcal{R}} \cap \overset{-1}{\leq}_{\mathcal{R}}$ и $\mathcal{L} = \leq_{\mathcal{L}} \cap \overset{-1}{\leq}_{\mathcal{L}}$ — являются эквивалентностями на множестве ${}^*W$.

В настоящей статье исследуются свойства отношений Грина на полугруппе нестандартных слов и рассматриваются приложения этих результатов к свободной проконечной полугруппе над алфавитом A [3].

Так как в полугруппе слов ${}^*W$ не выполняются никакие соотношения, то для слов $u, v \in {}^*W$ условие $u \leq_{\mathcal{J}} v$ равносильно тому, что $u = xvy$ для некоторых $x, y \in {}^*W^1$, т.е. слово v является подсловом слова u. Аналогично условие $u \leq_{\mathcal{R}} v$ равносильно тому, что $u = vx$ для некоторого $x \in {}^*W^1$, т.е. слово v является префиксом слова u, и условие $u \leq_{\mathcal{L}} v$ равносильно тому, что $u = xv$ для некоторого $x \in {}^*W^1$, т.е. слово v является суффиксом слова u.

Для слова $w \in {}^*W$, обозначим $F(w)$ множество всех конечных подслов w. Слово $w \in {}^*W$ называется *рекуррентным*, если для любого $u \in F(w)$ найдется такое слово v, что $uvu \in F(w)$, и *равномерно рекуррентным*, если это слово w бесконечно и $F(w) = F(u)$ для любого бесконечного подслова u слова w.

Теорема 1. *Для любых бесконечных слов $w, v \in {}^*W$ справедливы следующие утверждения: 1) если $F(v) \subset F(w)$, то найдется такой бесконечный префикс u слова v, что $w = xuy$ для некоторых слов $x, y \in {}^*W^1$; 2) условие $w \leq_{\mathcal{J}} v$ влечет $F(v) \subset F(w)$; 3) если слово w рекуррентно, то найдется такой бесконечный префикс u слова w, что $w = xuyuz$ для некоторых слов $x, y, z \in {}^*W^1$.*

Теорема 2. *Если равномерно рекуррентные слова $w, v \in {}^*W$ удовлетворяют условию $F(v) \subset F(w)$, то найдется такое подслово u слова w, что $u \leq_{\mathcal{R}} p$ и $u \leq_{\mathcal{L}} q$ для некоторого бесконечного префикса p слова v и некоторого бесконечного суффикса q слова v.*

Из [1] следует, что полугруппа нестандартных слов и ее фактор-полугруппы кодируют в своей структуре общие алгебраически-комбинаторные свойства членов соответствующих псевдомногообразий. В частности, для псевдомногообразия всех конечных полугрупп $\mathbf{Sg}$ свободный объект над множеством A является частным полугруппы ${}^*W$ по конгруэнции $\varepsilon = \bigcap\{\ker {}^*f : f$ есть гомоморфизм W в конечную полугруппу S.

Как показано в [4], фактор-полугруппа $F(A) = {}^*W/\varepsilon$ является нестандартной интерпретацией свободной проконечной полугруппы $\overline{\Omega}_m\mathbf{Sg}$ всех m-арных неявных операций над псевдомногообразием $\mathbf{Sg}$, т.е. это топологически A-порожденная компактная хаусдорфова топологическая полугруппа и для любой полугруппы $S \in \mathbf{Sg}$ и любого отображения $\theta : A \to S$ существует такой равномерно непрерывный гомоморфизм $\varphi : F(A) \to S$, что $\varphi \circ i_A = \theta$ для канонического отображения $i_A : A \to F(A)$.

С помощью [1, теорема 4.2] получаем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть для некоторых нестандартных слов $u, v \in$ $\in {}^*W$ уравнение $u = xvy$ имеет решение в каждой конечной полугруппе S. Тогда найдутся такие нестандартные слова $s, t \in$ $\in {}^*W$, что нестандартное тождество $u = svt$ будет выполняться в псевдомногообразии* $\mathbf{Sg}$.

В частности, изложенные результаты дают очень короткие и элементарные комбинаторные доказательства свойств свободной проконечной полугруппы $F(A)$, полученных ранее Дж. Алмейдой и М. Волковым в работах [3, 5].

Следствие. *Свободная проконечная полугруппа* $F(A)$ *удовлетворяет следующим свойствам:*

1) *слово* $w \in {}^*W$ *равномерно рекуррентно в том и только том случае, если* w *является* $\mathcal{J}$*-максимальным элементом в множестве* $F(A) \setminus W$;

2) *равномерно рекуррентные слова определяют в полугруппе* $F(A)$ $\mathcal{J}$*-классы, состоящие из регулярных элементов;*

3) *если* $w \in {}^*W$ *является равномерно рекуррентным словом, то для любого* $v \in \mathcal{J}(w)$ *найдется подслово* u *слова* w, *такое что* $u \equiv v(\mathcal{H})$ *для отношения Грина* $\mathcal{H} = \mathcal{R} \cap \mathcal{L}$;

4) *для бесконечного слова* $w \in {}^*W$ *множество* $F(w)$ *в том и только том случае будет рациональным, если* w *является равномерно рекуррентным периодическим словом, т.е.* $w \equiv u^n(\mathcal{J})$ *для некоторого* $u \in W$ *и* $n \in {}^*\mathbf{N}$.

Полученные результаты применяются в теории псевдомногообразий для аксиоматизации нестандартными тождествами важных классов конечных полугрупп.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Molchanov V.A.* Nonstandard characterization of pseudovarieties // Algebra Universalis. 1995. Vol. 33. P. 533–547.

2. *Лаллеман Ж.* Полугруппы и комбинаторные приложения. М.: Мир, 1985.

3. *Almeida J., Volkov M.V.* Subword complexity of profinite words and subgroups of free prosemigroups // Intern. J. Algebra Comput. 2006. Vol. 16. P. 221–258.

4. *Molchanov V.A.* Nonstandard free objects over pseudovarieties of finite algebraic systems // Contributions to General Algebra 16, Proceedings of the Dresden Conference 2004 (AAA68) and the Summer School 2004, Verlag Johannes Heyn, Klagenfurt, 2005. P. 145–154.

5. *Almeida J.* Profinite groups associated with weakly primitive substitutions // J. Mathematical Sciences. 2007. Vol. 144, № 2. P. 3881–3903.