$$|L_n^{SL}(f(\cdot)-f(x_0),x_0)-L_n^{SL}(g,x_0)| =$$

$$= \left| \sum_{k:x_{k,n}\in[0,\pi]\setminus O_\delta(x_0)} (f(x_{k,n})-f(x_0))l_{k,n}^{SL}(x_0) \right| < \varepsilon,$$

неравенства (4) и соответствующего выбора n получим

$$\left|L_n^{SL}(f,x_0)-f(x_0)\right| \le \left| \sum_{k:x_{k,n}\in O_\delta(x_0)} (f(x_{k,n})-f(x_0))l_{k,n}^{SL}(x_0) \right| +$$

$$+ \left| \sum_{k:x_{k,n}\in[0,\pi]\setminus O_\delta(x_0)} (f(x_{k,n})-f(x_0))l_{k,n}^{SL}(x_0) \right| + \varepsilon \le \left| \sum_{k:x_{k,n}\in O_\delta(x_0)} (f(x_{k,n})-f(x_0))l_{k,n}^{SL}(x_0) \right| +$$

$$+2\varepsilon \le \frac{2M}{\pi}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \varphi_{x_0}(x)dx + 4\varepsilon \le 5\varepsilon.$$

Таким образом, теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения: М., 1953. Т. 1, 2.
2. *Трынин А.Ю.* Сходимость интерполяционных процессов по собственным функциям задачи Штурма—Лиувилля: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 1992. 121 с.
3. *Трынин А.Ю.* О равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа—Штурма—Лиувилля. Саратов, 1991. 32 с. Деп. в ВИНИТИ 26.04.91, № 1763-В91.

УДК 517.984

А.Е. Федосеев

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ ОПЕРАТОРЕ С РАЗРЫВНЫМ ПРЕДЕЛОМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

В данной статье получена теорема равносходимости разложений в тригонометрические ряды Фурье и в ряды по собственным и присоединенным функциям интегрального оператора, в котором верхний предел интегрирования является разрывной функцией.

Обозначим через A оператор, действующий в пространстве $L[0,1]$:

$$Af = \int\limits_0^{\theta(x)} f(t)\,dt, \quad x \in [0,1], \tag{1}$$

где $\theta(x) = x + \frac{1}{2}$ при $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, $\theta(x) = 1 - x$ при $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Оператор вида (1) в случае, когда функция $\theta(x)$ является инволюцией, то есть $\theta(\theta(x)) = x$, был рассмотрен в работе [1]. В данном случае $\theta(x)$ инволюцией не является. Для доказательства теоремы равносходимости разложений в тригонометрические ряды Фурье и в ряды по собственным и присоединенным функциям оператора (1) используется метод, предложенный в [2].

Пусть $y = R_\lambda(A)f = (I - \lambda A)^{-1}Af$, где I — единичный оператор, λ — спектральный параметр. Рассмотрим краевую задачу:

$$v'(x) = \lambda D v(x) + D m(x), \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \tag{2}$$

$$P_0 v(0) + P_1 v\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \tag{3}$$

где $v(x) = \left(v_i(x)\right)^T_{i=\overline{1,4}}$, $D = (a_{ij})^4_{i,j=1}$, $a_{ij} = 0$, за исключением $a_{41} = a_{12} = -a_{23} = -a_{34} = 1$, $m(x) = \left(f(x),\, f\left(\frac{1}{2}+x\right),\, f\left(\frac{1}{2}-x\right),\, f(1-x)\right)^T$, $P_0 = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Q_2 & Q_1 \end{pmatrix}$, матрицы P_0, P_1 размерности 4×4, $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ($T$ — знак транспонирования).

Теорема 1. *Если $v(x)$ является решением краевой задачи (2), (3), а соответствующая однородная краевая задача имеет только нулевое решение, то $R_\lambda(A)$ существует и $R_\lambda(A)f = v_1(x)$ при $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, $R_\lambda(A)f = v_2\left(x - \frac{1}{2}\right)$ при $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.*

Обозначим через $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = -i$, $\omega_3 = i$, $\omega_4 = -1$ — собственные значения матрицы D. Тогда, если $\lambda \in S_0 = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \le \arg\lambda \le \frac{\pi}{4}\}$, то

$$\mathrm{Re}\lambda\omega_1 \ge \mathrm{Re}\lambda\omega_2 \ge 0 \ge \mathrm{Re}\lambda\omega_3 \ge \mathrm{Re}\lambda\omega_4.$$

Положим $v = \Gamma h$, где $h(x)$ — вектор той же размерности что и $v(x)$, $\Gamma = (\gamma_{ij})^4_{i,j=1}$, $\gamma_{1j} = 1$, $\gamma_{ij} = (-1)^i \omega_j^{i-1}$. Задача (2), (3) перейдет в задачу

$$h'(x) = \lambda D_1 h(x) + m_1(x), \tag{4}$$

$$U(h) = P_0 \Gamma h(0) + P_1 \Gamma h\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \tag{5}$$

где $m_1(x) = \Gamma^{-1} D m(x)$, $\Gamma^{-1} D \Gamma = D_1 = \mathrm{diag}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$.

Рассмотрим дополнительную краевую задачу, в которой дифференциальное уравнение то же, что и в (4), а краевые условия являются периодическими:

$$u'(x) = \lambda D_1 u(x) + m_1(x), \tag{6}$$

$$U_0(u) = u(0) - u\left(\frac{1}{2}\right) = 0. \tag{7}$$

Обозначим

$$g_j(x,t,\lambda) = \begin{cases} \varepsilon(x,t) e^{\lambda \omega_j (x-t)}, & \mathrm{Re}\lambda\omega_j \le 0, \\ -\varepsilon(t,x) e^{\lambda \omega_j (x-t)}, & \mathrm{Re}\lambda\omega_j > 0, j = \overline{1,4}, \end{cases}$$

$$g(x,t,\lambda) = \mathrm{diag}\left(g_1(x,t,\lambda), \ldots, g_4(x,t,\lambda)\right),$$

$$g_\lambda m_1(x) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} g(x,t,\lambda) m_1(t)\, dt,$$

где $\varepsilon(x,t) = \begin{cases} 1, & t \le x, \\ 0, & t > x. \end{cases}$

Теорема 2. *Если λ таково, что $\Delta^{-1}(\lambda)$ и $\Delta_0^{-1}(\lambda)$ существуют, то для решения $h(x) = h(x,\lambda)$ задачи (4), (5) и решения $u(x) = u(x,\lambda)$ задачи (6), (7) имеет место формулы*

$$h(x,\lambda) = -Y(x,\lambda)\Delta^{-1}(\lambda) \int\limits_0^{\frac{1}{2}} U_x\left(g(x,t,\lambda)\right) m_1(t)\, dt + g_\lambda m_1(x),$$

$$u(x,\lambda) = -Y(x,\lambda)\Delta_0^{-1}(\lambda) \int\limits_0^{\frac{1}{2}} U_{0x}\left(g(x,t,\lambda)\right) m_1(t)\, dt + g_\lambda m_1(x),$$

где $Y(x,\lambda) = diag\left(e^{\lambda\omega_1 x}, \ldots, e^{\lambda\omega_4 x}\right)$, $\Delta(\lambda) = P_0\Gamma - P_1\Gamma Y\left(\frac{1}{2},\lambda\right)$, $\Delta_0(\lambda) = E - Y\left(\frac{1}{2},\lambda\right)$, U_x и U_{0x} означает, что U и U_0 применяется к $g(x,t,\lambda)$ по x.

Обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \ldots$ нули функции $\Delta(\lambda)$ в рассматриваемом секторе. Выберем число $\delta > 0$ так, что $|\lambda_m - \lambda_n| > \delta$ при $m \neq n$. Введем область

$$S_\delta = \left\{ \lambda \in S_0 : |\lambda - \lambda_m| \geq \delta, \left| \lambda - i\frac{4\pi k}{\omega_j} \right| \geq \delta, j = \overline{1,4}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Лемма 1. *Если* $x \in \left[\varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon\right]$, $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$, $\lambda \in S_\delta$ *то*

$$\|Y(x,\lambda)\Delta^{-1}(\lambda)\|_{C\left[\varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon\right]} = O\left(e^{-\varepsilon \mathrm{Re}\lambda\omega_2} + e^{\varepsilon \mathrm{Re}\lambda\omega_3}\right),$$

$$\|Y(x,\lambda)\Delta_0^{-1}(\lambda)\|_{C\left[\varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon\right]} = O\left(e^{-\varepsilon \mathrm{Re}\lambda\omega_2} + e^{\varepsilon \mathrm{Re}\lambda\omega_3}\right).$$

Аналогичные оценки получаются при $\frac{\pi}{4} < \arg\lambda < 2\pi$.

Лемма 2. *Имеют место оценки:*

$$\|g_\lambda m_1(x)\|_\infty = O(\|f\|_1), \quad \|g_\lambda \chi(x)\|_\infty = O(\lambda^{-1}),$$

где компоненты вектор-функции $\chi(x)$ *являются характеристическими функциями отрезков из* $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\|f\| = \int\limits_0^1 |f(t)|\, dt$, $\|\cdot\|_\infty$ *— норма в* $L_\infty[0,1]$.

Используя метод контурного интегрирования получаем теорему.

Теорема 3 (равносходимости). *Для любой функции* $f(x) \in L[0,1]$ *имеют место соотношения*

$$\lim_{r\to\infty} \left\| S_r(f,x) - \sum_{j=1}^{4} \frac{1}{\omega_j} \sigma_r\left(m_{1j}, x\right) \right\|_{C\left[\varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon\right]} = 0,$$

$$\lim_{r\to\infty} \left\| S_r(f,x) - \sum_{j=1}^{4} \sigma_r\left(m_{1j}, x - \frac{1}{2}\right) \right\|_{C\left[\frac{1}{2} + \varepsilon, 1 - \varepsilon\right]} = 0,$$

где $S_r(f,x)$ *— частичная сумма ряда Фурье по с.п.ф. оператора* A *для тех характеристических чисел* λ_k, *для которых* $|\lambda_k| < r$; γ_{kj} *— компоненты матрицы* Γ: $\Gamma^{-1}D\Gamma = D_1 = diag(\omega_1, \ldots, \omega_4)$; $\sigma_r(f,x)$ *— частичная сумма ряда Фурье по системе* $\left\{e^{i4\pi kx}\right\}$ *на отрезке* $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ *при таких* $k \in \mathbb{Z}$, *что* $|k| < \dfrac{r}{4\pi}$; m_{1j} *— компоненты* $m_1(x)$, $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Кувардина Л.П., Хромов А.П.* О равносходимости разложений по собственным и присоединенным функциям интегрального оператора с инволюцией // Изв. вузов. Сер. Математика. 2008. № 5. С. 67–76.

2. *Хромов А.П.* Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // Мат. сб. 2006. Т. 197, вып. 11. С. 115–142.