УДК 519.53, 519.713

Е.В. Хворостухина

О ПРОБЛЕМАХ РАЗРЕШИМОСТИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ТЕОРИЙ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ГИПЕРГРАФИЧЕСКИХ АВТОМАТОВ

Рассматриваются так называемые гиперграфические автоматы, т.е. автоматы без выходных сигналов, у которых множества состояний наделены дополнительной алгебраической структурой гиперграфа. Это достаточно широкий и весьма важный класс автоматов, так как многообразие таких алгебраических систем охватывает, в частности, автоматы, у которых множества состояний являются плоскостями (например, проективными или аффинными), а также автоматы, у которых множество состояний разбивается на классы некоторой эквивалентности.

Данная статья посвящена исследованию проблем разрешимости элементарных теорий универсальных гиперграфических автоматов.

Согласно [1] *гиперграфом* называется система вида $H = (X, L)$, где X — непустое множество вершин гиперграфа и L — семейство произвольных подмножеств X, называемых *ребрами* гиперграфа. Вершины гиперграфа, принадлежащие некоторому его ребру, называются *смежными*. Гиперграф $H = (X, L)$ называется *эффективным*, если любая его вершина принадлежит некоторому ребру этого гиперграфа. Пусть p — произвольное натуральное число. Гиперграф H будем называть *гиперграфом с p-определимыми ребрами*, если в каждом его ребре найдется по крайней мере $p+1$ вершина и, с другой стороны, любые p вершин этого гиперграфа содержатся не более чем в одном ребре, т.е. каждое ребро однозначно определяется любыми своими p вершинами.

Эндоморфизмом гиперграфа $H = (X, L)$ называется преобразование φ множества вершин X, которое смежные в гиперграфе вершины переводит в смежные вершины этого гиперграфа, т.е. удовлетворяет следующему условию:

$$(\forall l \in L)(\exists l' \in L)(\varphi(l) \subset l').$$

Множество всех эндоморфизмов гиперграфа H с операцией композиции образует полугруппу $\mathrm{End} H$.

В настоящей статье под гиперграфическим автоматом понимается полугрупповой автомат без выходных сигналов [2] $A = (X, S, \delta)$, множество состояний которого X наделено такой структурой гиперграфа $H = (X, L)$, что при любом входном сигнале $s \in S$ функция переходов δ_s является эндоморфизмом H. Например, для любого гиперграфа H алгебраическая система $A = (H, \mathrm{End}H, \delta)$ с функцией $\delta(\varphi, x) = \varphi(x)$, где $(\varphi, x) \in \mathrm{End}H \times X$, является гиперграфическим автоматом, который обозначается $\mathrm{Atm}(H)$ и называется *универсальным гиперграфическим автоматом.*

Полугруппу входных сигналов автомата $A = (X, S, \delta)$ будем обозначать также $\mathrm{Inp}(A)$.

Пусть T — теория некоторой сигнатуры σ. Согласно [3] теория T называется *разрешимой*, если существует эффективная процедура, позволяющая по любому предложению Φ сигнатуры σ определить, принадлежит или нет Φ теории T. Если теория T не является разрешимой, то она называется *неразрешимой.*

Согласно [3] теория T называется *наследственно неразрешимой*, если любая подтеория теории T той же сигнатуры σ неразрешима.

Для формального языка $\mathbf{L}$ сигнатуры σ символом $P_{\mathbf{L}}$ обозначим множество всех предложений этого языка. Для класса $\mathbf{K}$ алгебраических систем сигнатуры σ символом $\mathbf{K}_{fin}$ обозначается класс конечных систем из $\mathbf{K}$. Теория $\mathrm{Th}(\mathbf{K})$ называется *эффективно неотделимой*, если рекурсивно неотделимы множества $\mathrm{Th}(\mathbf{K})$ и $P_{\mathbf{L}} \setminus \mathrm{Th}(\mathbf{K}_{fin})$, т. е. не существует таких непересекающихся рекурсивных множеств $\Phi, \Psi \subset P_{\mathbf{L}}$, что$\mathrm{Th}(\mathbf{K}) \subset \Phi$ и $P_{\mathbf{L}} \setminus \mathrm{Th}(\mathbf{K}_{fin}) \subset \Psi$.

Одним из важнейших методов доказательства неразрешимости теорий является метод относительно элементарной определимости [3].

Элементарная теория гиперграфических автоматов определяется в стиле аксиоматики Гильберта геометрии плоскости с помощью языка УИП с трехсортными переменными $\mathrm{L_A}$, которые используются для обозначения входных сигналов автомата, состояний автомата и ребер гиперграфа состояний автомата. Формула Φ языка $\mathrm{L_A}$ истинна на гиперграфическом автомате A, если при любой интерпретации этого языка в автомате A она образует истинное утверждение об этом автомате. Множество всех предложений языка $\mathrm{L_A}$, истинных на всех автоматах из некоторого класса гиперграфических автоматов $\mathbf{K}$, обозначается через $\mathrm{Th}(\mathbf{K})$ и называется *элементарной теорией класса гиперграфических автоматов* $\mathbf{K}$.

Построенная в [4] относительно элементарная интерпретация класса универсальных гиперграфических автоматов над эффективными гиперграфами с p-определимыми ребрами в классе полугрупп дает возможность проанализировать взаимосвязь важных проблем алгоритмической разрешимости элементарных теорий классов универсальных гиперграфических автоматов и классов полугрупп.

Для класса гиперграфических автоматов $\mathbf{K}$ символом $\mathrm{Inp}(\mathbf{K})$ обозначается класс полугрупп вида $\mathrm{Inp}(A)$, где $A \in \mathbf{K}$.

Теорема. *Для любого класса универсальных гиперграфических автоматов над эффективными гиперграфами с p-определимыми ребрами* $\mathbf{K}$ *справедливы следующие утверждения:*

1) *если элементарная теория класса* $\mathbf{K}$ *наследственно неразрешима, то и элементарная теория класса полугрупп* $\mathrm{Inp}\mathbf{K}$ *наследственно неразрешима;*

2) *если элементарная теория класса* $\mathbf{K}$ *эффективно неотделима, то и элементарная теория класса полугрупп* $\mathrm{Inp}\mathbf{K}$ *эффективно неотделима.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Зыков А.А.* Гиперграфы // УМН. 1974. Т. 29, № 6. С. 89–154.

2. *Плоткин Б.И., Гринглаз Л.Я., Гварамия А.А.* Элементы алгебраической теории автоматов. М.: Высш. шк., 1994.

3.*Ершов Ю.Л.* Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980.

4.*Хворостухина Е.В.* Об относительно элементарной определимости класса гиперграфических автоматов в классе всех полугрупп // Компьютерные науки и информационные технологии: материалы Междунар. науч. конф. Саратов, Россия, 1-4 июля 2009г. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. С. 212–213.

УДК 517.51

А.А. Хромов

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЙ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫМ СЕМЕЙСТВОМ РАЗРЫВНЫХ

В данной статье получена оценка погрешности приближения непрерывных функций семейством разрывных функций, построенных с помощью резольвенты оператора дифференцирования.

Рассматривается семейство операторов с разрывными образами:

$$\Omega_r u = \begin{cases} r\int\limits_x^1 e^{r(x-t)}u(t)dt, & x \in [0,1/2], \\ r\int\limits_0^x e^{-r(x-t)}u(t)dt, & x \in [1/2,1]. \end{cases} \tag{1}$$