БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения // Геометрия и кинематика движения. М.: Физматлит, 2006. 512 с.

2. *Бордовицына Т.В.* Современные численные методы в задачах небесной механики. М.: Наука, 1983. 136 с.

УДК 539.3

Я.А. Парфёнова

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ЖЕСТКОСТИ УПРУГОГО ЗАКРЕПЛЕНИЯ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В УПРУГОМ ИЗОТРОПНОМ СЛОЕ

Исследование процессов распространения гармонических волн в изотропных упругих волноводах продолжается более 125 лет. Можно считать, что к настоящему времени характеристики кругового (цилиндра) и плоского (слоя) волноводов получены и систематизированы исчерпывающим образом. Однако, практически отсутствуют работы, посвящённые исследованию волноводов с упругим закрепление границ. Введение условий упругого закрепления представляется целесообразным, так как позволяет моделировать влияние окружающей среды на волновые процессы без решения сложных контактных задач. Данная статья продолжает цикл статей [1, 2] и посвящена исследованию процесса распространения волн растяжения-сжатия в изотропном слое с упруго закреплёнными в касательном направлении границами.

Рассмотрим плоское напряженное состояние бесконечного упругого изотропного слоя толщины $2h$, который свободен от внешних нагрузок ($|x_2| \le h$, $|x_1| \le \infty$, $|x_3| \le \infty$). В качестве основных примем уравнения Ламе для случая плоского напряженного состояния. Упругому закреплению границ слоя в касательном направлении соответствуют граничные условия

$$\tau_{21} + du_1 = 0\,, \quad \tau_{22} = 0\,, \quad \text{при} \quad x_2 = \pm h\,, \tag{1}$$

где d – размерный параметр, характеризующий жесткость закрепления, при $d \to 0$ слой имеет свободные границы, а при $d \to \infty$ – жестко закреплённые. В силу зеркальной симметрии слоя относительно плоскости $x_2 = 0$ все возможные моды в нём можно разделить на антисимметричные (они были исследованы в [2]) и симметричные по нормальной координате, которые и изучаются в данной статье.

Будем искать решение поставленной краевой задачи в форме распространяющейся гармонической плоской волны

$$u_n(x_1, x_2, t) = U_n e^{kqx_2} e^{ik(x_1 - vt)}\,, \quad n = 1, 2\,, \tag{2}$$

где k — волновое число в продольном направлении, v — фазовая скорость и ikq — волновое число в поперечном направлении, q выбирается таким образом, чтобы уравнения движения имели нетривиально решение. Соответствующее дисперсионное уравнение согласно [2] имеет вид

$$4q_1 q_2 \coth(\eta q_1) - (1 + q_1^2)^2 \coth(\eta q_2) -$$

$$-\frac{q_1(q_1^2 - 1)\delta}{\eta} \coth(\eta q_1) \coth(\eta q_2) = 0. \tag{3}$$

Здесь величины q_1, q_2 являются корнями характеристического уравнения и определяются соотношениями

$$q_1^2 = 1 - V^2\,, \quad q_2^2 = 1 - V^2\kappa^2; \tag{4}$$

$V = v/c_2$ – безразмерная фазовая скорость; $\kappa^2 = c_2^2/c_1^2 = (1 - 2\nu)/2(1-\nu)$ отношение фазовых скоростей волны сдвига и продольной волны; ν – коэффициент Пуассона; безразмерные величины $\delta = d/G$ – параметр, характеризующий жёсткость закрепления (G – модуль сдвига); $\eta = kh$ – волновое число. Единственным отличием уравнения (3) от классического уравнения Рэлея—Лэмба является наличие последнего слагаемого, которое через параметр δ отражает влияние степени упругого закрепления поверхностей.

Численное исследование дисперсионного уравнения (3) показало, что существуют два семейства симметричных мод, частоты запирания которых соответствуют либо частотам толщинного резонанса растяжения-сжатия, либо частотам сдввигового толщинного резонанса. С ростом δ симметричная фундаментальная мода трансформируется в первую гармонику для слоя со смешанными граничными условиями. Толщинные моды растяжения-сжатия сохраняют свои частоты $\kappa(n - 1/2)\pi$ $(n = 1, 2, \dots)$, меняя лишь форму, в то время, как сдвиговые моды перемещаются вверх вместе с ростом δ в диапазоне частот запирания $[n\pi\,, (n + 1/2)\pi]$ $(n = 1, 2, \dots)$.

Проведём длинноволновый асимптотический анализ дисперсионного уравнения (3) для малых и больших δ, считая, что выполняется соотношение

$$\delta = \delta_0 \eta^{2m}\,, \quad \delta_0 = O(1)\,. \tag{5}$$

Устремляя $\eta \to 0$, можно выделить два семейства частот запирания:

$$\omega_1 = \frac{\pi(2n-1)}{2\kappa}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \omega_2 \tan \omega_2 = \delta. \tag{6}$$

Первое семейство не зависит от δ и соответствует частотам толщинного резонанса растяжения-сжатия для слоя со свободными границами. Второе семейство частот запирания задаётся неявно, оно связано с частотами сдвигового толщинного резонанса и зависит от параметра жесткости.

В случае малых δ ($m = 1$) дисперсионное уравнение может быть асимптотически сбалансировано тремя различными способами:

$$\begin{array}{llll} \textbf{Баланс 1:} & \tanh(\eta q_1) \sim \eta, & \tanh(\eta q_2) \sim \eta, & V \sim 1, \\ \textbf{Баланс 2:} & \tanh(\eta q_1) \sim \eta^2, & \tanh(\eta q_2) \sim 1, & V \sim \eta^{-1}, \\ \textbf{Баланс 3:} & \tanh(\eta q_1) \sim 1, & \tanh(\eta q_2) \sim \eta^{-2}, & V \sim \eta^{-1}. \end{array} \tag{7}$$

Приведём асимптотики дисперсионного уравнения для каждого варианта. Фундаментальной моде при малых δ соответствует асимптотика:

$$\omega^2 = \left(\delta_0 + 4(1-\kappa^2)\right)\eta^2 - \\ -\frac{1}{3}\left(4(1 - 5\kappa^2 + 8\kappa^4 - 4\kappa^6) + \delta_0(3 - 8\kappa^2 + 4\kappa^4) + \delta_0^2\right)\eta^4 + O(\eta^6). \tag{8}$$

Второй вариант баланса дисперсионного уравнения соответствует гармоникам, связанным с частотами сдвигового толщинного резонанса $\Omega_1 = \pi n$, ($n = 1, 2, \dots$). Длинноволновая асимптотика для частоты имеет вид

$$\omega^2 = (\Omega_1)^2 + \left(1 + 2\delta_0 - \frac{8\tan\kappa\Omega_1}{\Omega_1}\right)\eta^2 + O(\eta^4). \tag{9}$$

Последний вариант баланса дисперсионного уравнения связан с частотами толщинного резонанса растяжения-сжатия $\Omega_2 = \frac{(2n-1)\pi}{2\kappa}$, ($n = 1, 2, \dots$). Для частоты получено следующее приближение второго порядка:

$$\omega^2 = (\Omega_2)^2 + \left(\frac{1}{\kappa^2} + \frac{8}{\Omega_2 \tan(\Omega_2)}\right)\eta^2 + O(\eta^4). \tag{10}$$

Большие значения δ ($m = -1$) соответствуют случаю жестко закрепленных лицевых плоскостей. При этом низкочастотные колебания невозможны, и фундаментальная мода вырождается в прямую линию, соответствующую бездисперсионному решению. Поэтому в данном режиме мы имеем лишь два варианта асимптотического баланса:

$$\begin{array}{llll} \textbf{Баланс 1:} & \tanh(\eta q_1) \sim \eta^{-2}, & \tanh(\eta q_2) \sim 1, & V \sim \eta^{-1}, \\ \textbf{Баланс 2:} & \tanh(\eta q_1) \sim 1, & \tanh(\eta q_2) \sim \eta^{-4}, & V \sim \eta^{-1}. \end{array} \tag{11}$$

Соответствующие асимптотики имеют вид

$$\omega^2 = (\Omega_3)^2 + \left(1 - \frac{2\Omega_3^2}{\delta_0}\right)\eta^2 + \frac{3}{\delta_0^2}(\Omega_3^2 + 2\delta_0)\eta^4 + O(\eta^6)\,, \tag{12}$$

$$\Omega^2 = (\Omega_2)^2 + \frac{1}{\kappa^2}\eta^2 - \frac{8}{\delta_0}\eta^4 + O(\eta^6)\,, \tag{13}$$

где $\Omega_3 = \pi(2n-1)/2$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Сравнение асимптотик (8), (9), (10), (12) и (13) с соответствующими численными решениями показало высокую точность их совпадения. Случай конечных δ_0 будет рассмотрен отдельно.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Moukhomodiarov R.R., Pichugin A.V., Rogerson G.A.* The Transition between Neumann and Dirichlet Boundary Conditions in Isotropic Elastic Plates // Mathematics and Mechanics of Solids, 2009. Published online, doi:10.1177/1081286509103781.

2. *Коссович Л.Ю., Мухомодьяров Р.Р., Парфёнова Я.А.* Распространение волн в упруго-закреплённом изотропном слое // Вестн. Самар. ун-та. Естественно-научная сер.: Механика. 2008. № 8/2. С. 78–88.

УДК 629.78

Я.Г. Сапунков

ОПТИМАЛЬНЫЙ ВЫВОД НА ОРБИТУ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С КОМБИНИРОВАННОЙ ТЯГОЙ

В статье с использованием кватернионных элементов орбиты с помощью принципа максимума Понтрягина решена пространственная задача об оптимальном выводе космического аппарата (КА) с комбинированной тягой на заданную круговую орбиту. Даны результаты численного решения.

1. В безразмерных кватернионных элементах орбиты $\mathbf{A} = (A_0, A_1, A_2, A_3)$, $\mathbf{B} = (B_0, B_1, B_2, B_3)$ движение КА с комбинированной тягой описывается системой уравнений (t – время, φ – независимая вспомогательная переменная)

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\varphi} = -Q\mathbf{F}_1 \sin\varphi, \frac{d\mathbf{B}}{d\varphi} = Q\mathbf{F}_1 \cos\varphi, \frac{dt}{d\varphi} = u^2\sqrt{2Q},$$

$$Q = A^2 + B^2, \mathbf{q} = P(\mathbf{u})(\mathbf{p}_1 + \varepsilon\mathbf{p}_2), \mathbf{F}_1 = u^2\mathbf{q} + (\mathbf{w},\mathbf{q})\mathbf{w}, \tag{1}$$