

И.Ф. Абитова, В.Ю. Ольшанский

ОБ УЧЕТЕ ПЕРЕНОСНЫХ СИЛ ИНЕРЦИИ
В ОДНОЙ МОДЕЛИ ПЬЕЗОГИРОСКОПА

Построена математическая модель устройства для измерения угловой скорости на основе пьезоэффекта при учете кориолисовых и переносных сил инерции. Выполнен анализ влияния на амплитуду вынужденных колебаний каждой из указанных сил инерции при различных значениях угловой скорости.

Рассматривается следующая модель [1] устройства для измерения угловых скоростей подвижного объекта: к взаимно перпендикулярным плоскостям прикреплены тонкие пластины толщиной δ и площадью σ . Груз массы m закреплен так, что от него на контактирующие пластины передаются только нормальные усилия.

Пластины выполнены из пьезокерамики. Материал сориентирован таким образом, что при сжатии пластины силой, перпендикулярной ее плоскости, возникает продольный пьезоэффект [2, с. 228–232]. К пластинам крепят электроды, $u_i(t)$ – разность потенциалов на свободной поверхности и поверхности, которая закреплена на соответствующей координатной плоскости. Электрическое поле, переменное во времени, порождает в пластине плоские деформационные волны, – этот процесс вынуждает груз двигаться. При наличии угловой скорости относительно инерциальной системы возникают силы инерции, которые действуют на груз M .

Рассматривается простейшая математическая модель, позволяющая оценить влияние угловой скорости подвижной системы на амплитуду и другие характеристики колебаний.

Пусть силовое поле отсутствует. Кроме реакций связей на груз M действует сила инерции. Относительная деформация S_i с механическим напряжением T_i и напряженностью электрического поля E_i в пластине Π_i связана уравнением обратного пьезоэффекта [2, с. 228–232]

$$S_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} = d^E E_i + s^E T_i. \quad (1)$$

Здесь $\xi_i(x_i, t)$ — перемещение плоского слоя с координатой x_i в пластине Π_i , $T_i(x_i, t)$ — механическое напряжение в пластине Π_i по оси i , $E_i(t) = U_i/\delta$, $x_i \in [0, \delta]$, d^E — пьезомодуль при продольном пьезоэффекте, s^E — упругие податливости по осям при $E = \text{const}$.

Приравнявая силы, вызванные механическими напряжениями T_i в пластине, и силы, действующие на свободную поверхность пластины со стороны груза M , получим

$$T_i(\delta_i, t)\sigma_i = F_i + M \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2}, \quad i = 2, 3. \quad (2)$$

Здесь F_i — сила инерции, обусловленная движением объекта, $F_i = F_i^e + F_i^c$, F_i^e , F_i^c — переносная и кориолисова составляющие силы инерции.

$$\begin{aligned} F_2^e &= -\frac{ma}{2} [\omega_1\omega_2 + \omega_2\omega_3 - (\omega_1^2 + \omega_3^2)], \\ F_3^e &= -\frac{ma}{2} [\omega_1\omega_3 + \omega_2\omega_3 - (\omega_1^2 + \omega_2^2)], \\ F_2^c &= 2m\omega_1 \frac{\partial \xi_3(\delta, t)}{\partial t}, \quad F_3^c = -2m\omega_1 \frac{\partial \xi_2(\delta, t)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3)$$

Ранее эта задача была рассмотрена без учета переносной силы инерции (см. [1]).

Для описания распространения плоских упругих волн используем волновое уравнение:

$$k_1 \xi_{tt}'' + k_2 \xi_t' = \xi_{xx}'' \quad (4)$$

где $k_1 = \frac{1}{(c^E)^2}$, c^E — скорость звука в пьезокерамической пластине при $E = \text{const}$, $k_2 = \frac{2\beta}{Qc^E}$, (по этой формуле определяется коэффициент затухания), β — резонансная частота, Q — механическая добротность пьезоматериала.

Дополним уравнения (4) начальными и граничными условиями:

$$\xi_i(x_i, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad i = 2, 3; \quad (5)$$

$$\xi_i(0, t) = 0, \quad i = 2, 3. \quad (6)$$

В дальнейшем считаем, что напряженность электрического поля для пластины Π_2 изменяется по закону $E_2(t) = E \sin \beta t$, а напряженность электрического поля, приложенного к пластине Π_3 , — $E_3 = 0$.

Из условий (1), (2) получаем соотношения, связывающие граничные условия волновых уравнений (4):

$$\left. \frac{\partial \xi_i(x_i, t)}{\partial x_i} \right|_{x_i=\delta} = d^E E_i(t) + \frac{s^E}{\sigma} \left[-m \frac{\partial^2 \xi_i(\delta, t)}{\partial t^2} + 2(-1)^j m \omega_1 \frac{\partial \xi_j(\delta, t)}{\partial t} + P_i \right],$$

$$i = 2, 3, \quad j = 5 - i, \quad (7)$$

где P_2 и P_3 — компоненты переносной силы по соответствующим осям. Рассмотрим в дальнейшем квазистационарный случай $\omega_1 = \text{const}$. Затем перейдем в задаче к безразмерным переменным $x_i = x_i^P/\delta$, $\xi_i = \xi_i^P/\delta$, $t = t^p \cdot c^E/\delta$, $i = 2, 3$.

Будем рассматривать установившиеся колебания. Для функций ξ_i , $i = 2, 3$, имеем уравнение (4) с граничными условиями (6) и (7), решение которого представляется в виде суммы решений двух задач. Функция ξ^E есть решение уравнения (4), удовлетворяющего условию (6) и условию

$$\left. \frac{\partial \xi^E}{\partial x} \right|_{\tilde{x}=1} = d^E E \sin \beta t + \kappa \left[-\frac{\partial^2 \xi^E(1, t)}{\partial t^2} - i\epsilon \frac{\partial \xi^E(1, t)}{\partial t} \right], \quad (8)$$

где $\kappa = \frac{s^E(c^E)^2 m}{\sigma \delta}$, $\epsilon = \frac{2\omega_1 \delta}{c^E}$. Для удобства решения введена новая функция $\xi^E = \xi_2^E + i\xi_3^E$.

Для функций ξ_i^P условие (8) заменяется двумя условиями:

$$\left. \frac{\partial \xi_i^P(x, t)}{\partial x} \right|_{\tilde{x}=1} = \frac{s^E}{\sigma} P_i + \kappa \left[-\frac{\partial^2 \xi_i^P(1, t)}{\partial t^2} + \epsilon(-1)^i \frac{\partial \xi_j^P(1, t)}{\partial t} \right],$$

$$i = 2, 3, \quad j = 5 - i. \quad (9)$$

Решение первой задачи описывает вынужденные колебания, решение второй — учитывает вклад постоянных сил. Для первой задачи решение ищем в виде

$$\xi^E(x, t) = X_1(x) \cos \beta t + X_2(x) \sin \beta t.$$

Решение второй задачи запишем в следующем виде:

$$\xi_2^P(x, t) = X_3(x) = a_3 + b_3 x, \quad \xi_3^P(x, t) = X_4(x) = a_4 + b_4 x.$$

Решением уравнения (4) будет функция $\xi_i(x, t) = \xi^E(x, t) + \xi_i^P(x, t)$.

На основе этого решения была построена зависимость амплитуды колебаний пластины Π_3 от частоты вынужденных колебаний β . При частоте $\beta=0,463(2,778\text{МГц})$ достигается максимальная амплитуда.

Учет переносных сил инерции P_2 и P_3 становится существенным, когда угловая скорость достигает значений 300 об/мин и выше. Расчеты проведены при следующих значениях характеристик $\delta = 6 \cdot 10^{-4}$ м, $\sigma = 1,75 \cdot 10^{-4}$ м², $c^E = 3,6 \cdot 10^3$ м/с, $m = 10^{-3}$ кг, $s^E = 3,5 \cdot 10^{-11}$ м²/Н, $d^E = 4 \cdot 10^{-10}$ м/В, $U_0 = 400$ В, $Q = 90$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Нагар Ю.Н., Ольшанский В.Ю., Панкратов В.М., Серебряков А.В.* Об одной модели пьезогироскопа // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 2. С. 71–74.
2. *Окадзаки К.* Технология керамических диэлектриков. М.: Энергия, 1976.

УДК 539.3

Н.С. Анофрикова, Н.В. Сергеева

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В НАСЛЕДСТВЕННО-УПРУГОМ СЛОЕ: СЛУЧАЙ СИММЕТРИЧНОГО ПО НОРМАЛЬНОЙ КООРДИНАТЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

В работах [1–3] на примере упругого слоя и цилиндрической оболочки показана возможность построения дисперсионных кривых с помощью асимптотических приближенных теорий. Данная работа посвящена исследованию влияния наследственности на поведение дисперсионных кривых в случае наследственно-упругого слоя, материал которого описывается с помощью модели Работнова [4]. Будем рассматривать распространение волн в бесконечной наследственно-упругой пластине ограниченной плоскостями $z = \pm h$, в направлении оси x (рис. 1). Динамическое напряженно-деформированное состояние (НДС) пластины описывается уравнениями движения в напряже-

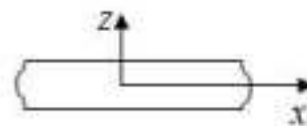


Рис. 1

ниях, записанных для случая плоской задачи, и уравнениями состояния:

$$\begin{cases} \tilde{E}\epsilon_{ii} = \sigma_{ii} - \tilde{\nu}(\sigma_{22} + \sigma_{kk}), \\ 0 = \sigma_{22} - \tilde{\nu}(\sigma_{ii} + \sigma_{jj}), \\ \tilde{E}\epsilon_{ij} = (1 + \tilde{\nu})\sigma_{ij}, \quad i \neq j \neq k = 1, 3, \end{cases} \quad (1)$$

где $\tilde{E} = E(1 - \Gamma^*)$, $\tilde{\nu} = \nu + \frac{1 - 2\nu}{2}\Gamma^*$,

$$\Gamma^* f(t) = k \int_{-\infty}^t \mathfrak{D}_{-\frac{1}{2}}(-\beta_*, t - t_*) f(t_*) dt_*, \quad (2)$$

$\mathfrak{D}_{-\frac{1}{2}}(-\beta_*, t) = t^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_*)^n t^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$, σ_{ij} , ϵ_{ij} — компоненты тензора напряжений и тензора деформаций соответственно, E , ν — мгновенные