

($\nu = 2$) и сферической ($\nu = 3$) симметрий течения представлен на рис. 3. Если плотность невозмущенной среды постоянна ($\omega = 0$), то $\gamma_s = 73.1395$ для $\nu = 2$ и $\gamma_s = 3.05361$ для $\nu = 3$. В связи с этим можно отметить, что в сферическом случае при $\omega = 0$ экстраполяция результатов работы [1] дает значение γ_s , близкое к трем.

Целью статьи было указать на два возможных варианта развития течения в области перед отраженной УВ. Формальное решение задачи о сходящейся УВ может быть построено для любых наборов значений параметров ν , ω , γ [2]. Однако физическая сторона процесса, наблюдаемого в области III для значений $\gamma_s = \gamma_s(\nu, \omega) < \gamma$, не ясна и требует дополнительного исследования.

Автор благодарит И.А. Чернова за внимание к работе.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Валиев Х.Ф.* Отражение ударной волны от центра или оси симметрии при показателях адиабаты от 1.2 до 3 // ПММ. 2009. Вып. 73, №3. С. 397–407.
2. *Lazarus R.B.* Self-similar solutions for converging shocks and collapsing cavities // SIAM J. Numer. Anal. 1981. Vol. 18, is. 2. P. 316–371.

УДК 539.3

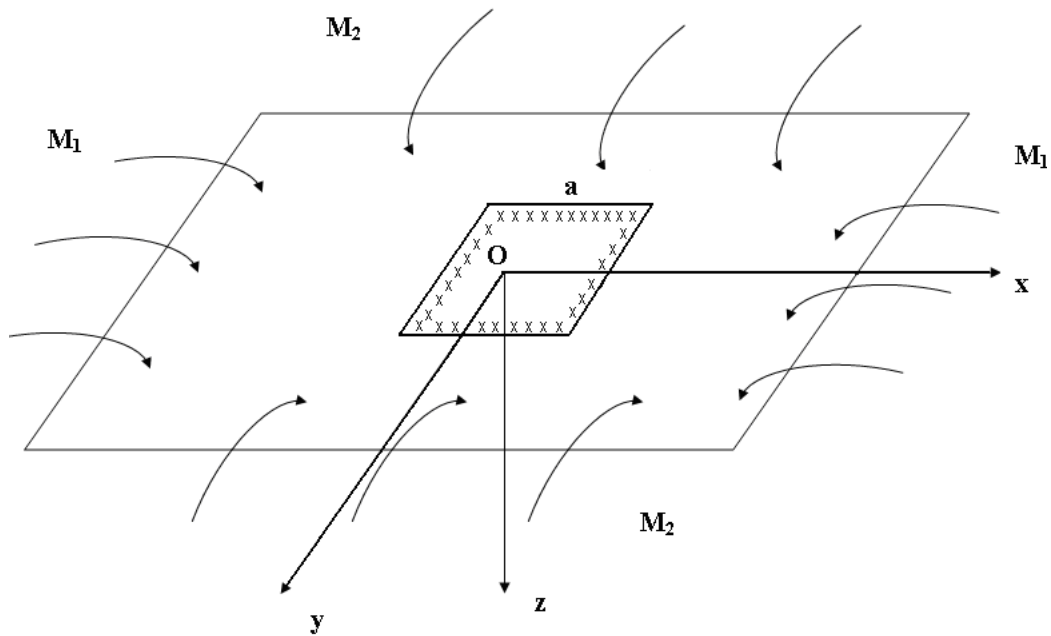
В.И. Копнина, М.В. Овчинникова

ИЗГИБ ИЗОТРОПНОЙ ПЛИТЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ КВАДРАТНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Пусть имеется изотропная прямоугольная плита, ослабленная квадратным отверстием (со стороной a). Центр отверстия совпадает с началом системы координат, которая выбирается следующим образом: плоскость XOY совпадает со срединной плоскостью плиты, а ось OZ направлена вертикально вниз (рисунок). Пластинка находится под действием изгибающих моментов интенсивности M_1 на сторонах, параллельных оси OY , и интенсивности M_2 на сторонах, параллельных оси OX . Будем считать, что контур отверстия или жестко заделан, или свободен от действия изгибающих нагрузок.

Задача состоит в определении НДС такой плиты. Сделаем два предположения:

- 1) размеры отверстия малы по сравнению с размерами самой плиты;
- 2) отверстие находится достаточно далеко от краёв плиты (порядка двух-трех диаметров).



Математическая модель поставленной задачи сводится к интегрированию однородного бигармонического уравнения [1]:

$$\nabla^2 \nabla^2 w(x, y) = 0 \quad (1)$$

относительно функции прогиба точек срединной плоскости плиты. Данное уравнение должно быть проинтегрировано с учетом граничных условий на контуре квадратного отверстия. Граничные условия имеют вид:

при жёсткой заделке

$$w = 0, \frac{dw}{dn} = 0; \quad (2)$$

при свободном от действия изгибающих нагрузок крае отверстия

$$M_n = 0, N_n + \frac{\partial H_{nt}}{\partial S} = 0. \quad (3)$$

Здесь M_n — изгибающий момент, действующий на площадке с нормалью n (n — внешняя нормаль к контуру отверстия), $N_n + \frac{\partial H_{nt}}{\partial S}$ — обобщенная перерезывающая сила, действующая на той же площадке[2]. Введя наряду с вещественными независимыми переменными x и y две независимые комплексные переменные:

$$z = x + iy, \bar{z} = x - iy, \quad (4)$$

получим выражения для функции прогиба в следующем виде [3]:

$$w(z, \bar{z}) = Re[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)] = \frac{1}{2}[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z) + \overline{z\varphi(z)} + \overline{\chi(z)}], \quad (5)$$

где $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ есть аналитические в области плиты функции комплексных переменных, $\psi(z) = \chi'(z)$.

Граничные условия при жесткой заделке и свободном нагружении можно объединить, представив их в общем виде (см. [3]):

$$k_1\varphi(t) + k_2[\overline{t\varphi'(t)} + \overline{\psi(z)}] = 0, \quad (6)$$

где $\begin{cases} k_1 = \frac{3+v}{1-v} \\ k_2 = -1 \end{cases}$ в случае свободного нагружения края плиты и

$\begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 1 \end{cases}$ в случае жесткой заделки.

Задачу решаем методом наложения с использованием теории функций комплексного переменного. Этот метод состоит в представлении функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в следующем виде (см. [3]):

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) + \varphi_1(z), \psi(z) = \psi_0(z) + \psi_1(z), \quad (7)$$

где $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ характеризуют НДС сплошной пластинки, а $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ — влияние отверстия на НДС плиты.

Сначала получаем выражения для функций $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$, затем, подставляя эти выражения в граничные условия (6) с учетом (7), получаем граничные условия для $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$. Так как отверстие имеет квадратную форму, то введем отображающую функцию вида (см. [3]):

$$z = \omega(\xi) = R\left(\xi + \frac{m}{\xi^3}\right), \quad (8)$$

которая отображает внешность единичного круга γ в плоскости ξ на внешность квадрата в плоскости z . Для определения вида функций $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ будем использовать интегралы типа Коши. Умножая сначала граничное условие, а потом сопряженное граничное условие на ядро Коши $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma}{\sigma-z}$ ($|\xi| > 1$) и интегрируя по контуру единичной окружности γ , получаем выражения для $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$. В итоге получаем окончательные выражения для функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$:

$$\varphi(z) = -\frac{M_1 + M_2}{4D(1+v)}z + \frac{A_1 R m}{\xi^3 k_1} + \frac{B_1 R}{k_1 - k_2 m} \frac{1}{\xi}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \psi(z) = & \frac{M_2 - M_1}{2D(1-v)}z + \frac{1}{k_2} \left(\frac{A_1 R}{\xi} + \frac{B_1 R m}{\xi^3} \right) - \\ & - \left(-\frac{\frac{1}{\xi} + m\xi^3}{1 - \frac{3m}{\xi^4}} \left(3\frac{A_1 R m}{\xi^4 k_1} - \frac{B_1 R}{k_1 - k_2 m} \frac{1}{\xi^2} \right) + a_1 m \xi \right), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$A_1 = \frac{M_1 + M_2}{4D(1 + \nu)}(k_1 + k_2), \quad B_1 = \frac{M_1 - M_2}{2D(1 - \nu)}k_2. \quad (11)$$

Численные расчеты НДС прямоугольной изотропной пластинки, ослабленной одним квадратным отверстием, были проведены для двух случаев:

- 1) край отверстия свободен от действия изгибающих нагрузок;
- 2) край отверстия жестко защемлен (таблица).

Свободное закрепление (M_Θ)	0°	30°	45°	60°	90°	135°	150°	180°
Общий случай	2,425	3,117	4,083	3,192	2,491	4,083	3,117	2,425
Чистый изгиб	1,639	2,103	2,722	2,103	1,639	2,722	2,103	1,639
Односторонний изгиб	0,853	1,089	1,361	1,014	0,786	1,361	1,089	0,853
Жесткая заделка (M_r)								
Общий случай	1,465	3,192	5,310	2,877	1,190	5,310	3,192	1,465
Чистый изгиб	0,885	2,023	3,540	2,023	0,885	3,540	2,023	0,885
Односторонний изгиб	0,305	0,854	1,770	1,169	0,580	1,770	0,854	0,305

Сравнивая результаты, полученные в первой и второй задачах, можно сделать следующие выводы:

- 1) свободное закрепление снижает концентрацию напряжений во всех рассмотренных случаях;
- 2) жесткое закрепление увеличивает концентрацию напряжений, разница между максимальным и минимальным значениями напряжений значительно больше, чем при свободном закреплении;
- 3) во всех рассмотренных случаях и при обоих способах закрепления максимальное значение изгибающего момента достигается в угловых точках квадрата.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Савин Г.Н. Концентрация напряжений около отверстий. М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1951.
2. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1957.
3. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.