

Показатели степеней в выражении для $R(V)$ примут вид

$$\begin{aligned}
 n_{00} &= -\frac{2}{2 + \nu - \omega}, \\
 n_{11} &= \frac{(-8\nu + 4\nu^2 + 4\omega + 8\nu\gamma - 4\gamma + \nu^2\gamma^2 - 3\nu^2\gamma - 2\gamma\nu\omega - \\
 &\quad - 2\nu\omega - 4\gamma^2\omega + \gamma^2\omega^2 + \gamma\omega^2 + 4\gamma^2) / ((2 + \nu ga - \nu) \\
 &\quad (2 + \nu - \omega)(2 - 2\gamma + \gamma\omega - \nu))}{\gamma - 1}, \\
 n_{33} &= -\frac{\gamma - 1}{2 - 2\gamma + \gamma\omega - \nu}, \\
 m_{00} &= s, \\
 m_{11} &= -\frac{1}{2} \frac{((-2\nu + \nu\gamma s - 2s\nu + 2\omega + s\omega)(8\nu\gamma - 4\gamma - 8\nu + \\
 &\quad + 4\gamma^2 + 4\nu^2 - 3\nu^2\gamma + \nu^2\gamma^2 - 2\gamma\nu\omega + 4\omega - 2\nu\omega - \\
 &\quad - 4\gamma^2\omega + \gamma^2\omega^2 + \gamma\omega^2)) / ((2 + \nu\gamma - \nu)(2 - 2\gamma + \gamma\omega - \nu) \\
 &\quad (-2\nu + \omega + \nu\gamma))}{\gamma\omega - 2\nu + \omega}, \\
 m_{22} &= -\frac{\gamma\omega - 2\nu + \omega}{-2\nu + \omega + \nu\gamma}, \\
 m_{33} &= \frac{1}{2} \frac{\nu\gamma s + 2\gamma s - \gamma s\omega - s\nu - 2s + s\omega + 2\omega - 2\nu}{2 - 2\gamma + \gamma\omega - \nu}.
 \end{aligned}$$

Представленное автомодельное решение является обобщением известных результатов. В частности, Н.С. Мельникова изучала случай с $\nu = 3$, $s = 0$ (см. [1, 2]). Альтернативная физическая интерпретация этого решения предложена в статье [3].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерностей в механике. 5-е изд. М.: Наука, 1965. 386 с.
2. *Коробейников В.П., Мельникова Н.С., Рязанов Е.В.* Теория точечного взрыва. М.: Наука, 1961. 332 с.
3. *Чернов И.А.* Трактовка решения Седова как серии промежуточных асимптотик в течении от сильного взрыва // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. Т. 18, № 4. 2010. С. 33–43.

УДК 517.984

Г.П. Шиндяпин, А.А. Матутин

РЕФРАКЦИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ОКЕАНА

Задачи рефракции ударных волн (УВ) на поверхности океана вызывают неизменный теоретический интерес исследователей [1–4] и представляют практический интерес для многочисленных приложений.

В статье объясняются механизмы гашения возмущений, свойственных многим природным явлениям типа цунами и др.

1. При падении УВ AM , BN (рис. 1, 2) относительной интенсивности $P_{10} = (p_1 - p_0)/B_0^-$, $B_0^- = \rho_0^- c_0^{-2}$ под углом α к вертикали на свободную поверхность OA , разделяющую различные среды (ГАЗ/ГЖС): воздух и воду с газосодержащими γ^+ , γ^- , возникают различные режимы рефракции УВ. Режим *slow-fast* при падении УВ сверху с картиной течения (рис. 1, а) (интерферограммой [1]) и схемой течения при регулярной рефракции RR [3] (рис. 1, б) представлен на рис. 1, а режим *fast-slow* при падении УВ снизу с картиной течения (рис. 2, а) (интерферограммой [2]) и схемой течения при нерегулярной рефракции NR [4] (рис. 2, б) – на рис. 2.

Асимптотический анализ (теория коротких волн [3–5]) при относительно малой интенсивности падающей УВ ($\bar{\varepsilon} \ll 1$, $\bar{\varepsilon} = L_0(\gamma)\varepsilon_{10} = R_0(\gamma)P_{10}$, $\varepsilon_{10} = (p_1 - p_0)/p_0$), характерной для рассматриваемых случаев (снизу – ГЖС пузырькового типа), приводят [5] к установлению двух инвариантов. Условия совместности течений на свободной поверхности (в верхней и нижней областях) в точке A ($\eta_A^+ = \eta_A^- = 0$, $y_A/t = c_0\eta_A$, $x_A/t = c_0\xi_A$) приводят к I инварианту

$$c_0^+ \xi_A^+ = c_0^- \xi_A^- \quad (1)$$

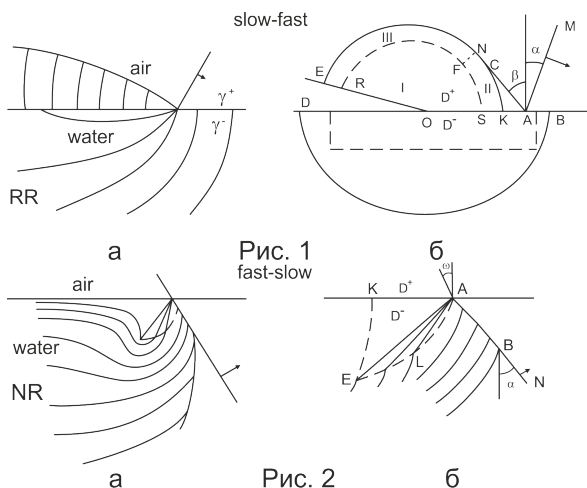


Рис. 1
fast-slow

Рис. 2

Условия на свободной поверхности OA ($\xi = \xi(\eta)$) в точке A (для давлений и скоростей $p^+ = p^-$, $u_n^+ = u_n^- = u_n$) приводит [5] к записи ($\eta^\pm = 0$, $\xi'_{OA} = -1/\text{tg } \delta$) $(V^\pm - c_0^\pm \eta_A^\pm)/(U^\pm - c_0^\pm \xi_A^\pm) = 1/\xi'_{OA}$. Для относительно слабых УВ (при $P_{10} \ll 1$, $|U^\pm| \ll c_0^\pm \xi_A^\pm$) это приводит ко II инварианту рефракции

$$V^+ = V^- \quad (2)$$

Инварианты I, II имеют место для всех режимов рефракции (регулярной RR ; нерегулярной NR ; регулярной с УВ, замыкающей волну разрежения RRW).

Анализ задач рефракции УВ в переменной теории коротких волн

(для областей больших градиентов параметров [3])

$$\begin{aligned}\xi &= 1 + \bar{\varepsilon}X, \eta = \bar{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}Y; R/c_0t = 1 + \bar{\varepsilon}\delta, \Theta = \bar{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}Y; \delta = X + \frac{1}{2}Y^2, \\ u &= P_{10}u^{(1)}, v = P_{10}^{\frac{3}{2}}R_0^{\frac{1}{2}}v^{(1)}; \frac{u}{c_0} = \bar{\varepsilon}^\mu/R_0, \frac{v}{c_0} = \bar{\varepsilon}^{\frac{3}{2}}v/R_0, \\ (p - p_0)/B_0 &= P_{10}P^{(1)}; (\rho - \rho_0)\rho_0 = P_{10}H^{(1)}\end{aligned}\quad (3)$$

приводит к построению решений для системы уравнений коротких волн

$$2(\mu - \delta)\mu_\delta + v_y + \mu = 0, \mu_y = v_\delta, \mu = P^{(1)} = H^{(1)}.\quad (4)$$

Для волны разрежения ALE (рис. 2, б) имеем решение

$$\mu = -\frac{1}{2}z^2 + \delta_A, v = \frac{1}{3}z^3 - \mu Y + d, z = (X - X_A)/Y.\quad (5)$$

Условия на фронтах УВ ($X = X^*(Y)$, $\psi^v = dX^*/dY$; μ_1, v_1 – значения перед фронтом УВ) имеют вид

$$X - \psi^v Y = \frac{1}{2}(\psi^{v^2} + \mu + \mu_1), (\mu - \mu_1)(\psi^v + Y) = v_1 - v, P^{(1)} = \mu.\quad (6)$$

При постановке краевых задач для системы (4) к условиям (5), (6) на границах областей D^+ , D^- добавляются условия сращивания с решениями в областях I (линейного решения), III (квазиодномерного решения). Неизвестные участки УВ на границах областей определяются согласно (6) при решении краевых задач для системы (4) [3–5].

2. Slow-fast. При падении УВ сверху масштабы давлений ($B_0 = \rho_0 c_0^2$), учитывающие плотность и сжимаемость (через скорость звука c_0), $B_0^- \gg B_0^+$, тогда для инварианта Π согласно (3) имеем $v^+ \ll v^-$, т.е. $v^+ = 0$ и $Y = 0$ ($tg\delta = -1/\xi' = 0$) и согласно (4) имеем

$$\mu_Y = 0, Y = 0.\quad (7)$$

Это условие на свободной поверхности в данном случае совпадает с условием на твердой стенке. Физически (7) приводит к тому, что в нижнюю область передается лишь малая часть энергии. Масштаб возмущений в нижней области мал ($P_{10}^\pm = (p_1 - p_0)/B_0^\pm$) $P_{10}^- \ll P_{10}^+$; параметр подобия (см. [5]) $\bar{L} = L_0^-/L_0^+$, учитывающий газосодержания областей ($L_0^-/L_0^+ \sim B_0^-/B_0^+$, $\bar{L} \ll 1$), также мал.

Краевая задача для верхней области D^+ решается [3] при условии (7) отдельно (в области D^-) для функции $\mu(\delta, Y)$ системы (4). Найденное

решение позволяет сформулировать условие на свободной поверхности для области D^- , которое в рамках асимптотической теории ($\bar{\varepsilon} \ll 1$) приводит к решению краевой задачи для уравнения Лапласа.

3. Fast-slow. При падении УВ снизу имеем случай жидкость/газ, который является частным для общей теории рефракции (ГЖС/ГЖС) [4, 5]. Решающую роль здесь играет волна разрежения (ALE), которая понижает давление q^- за падающим фронтом в точке А ($q^- = (p_A^- - p_0)/(p_1 - p_0)$, $q^- \leq 1.0$). В случае жидкость/газ параметры подобия [5]

$$\alpha^v = tg\alpha/\bar{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}; \bar{L} = L_0^-/L_0^+(\ll 1); C_\gamma = (c_0^- - c_0^+)/c_0^- \bar{\varepsilon}(\gg 1). \quad (8)$$

Анализ [3–5] показывает, что в рамках теории коротких волн (ТКВ) $\mu_A = q^+ = 0$ за задним фронтом волны разрежения, т.е. в верхней области течения D^+ возмущениями можно пренебречь.

В зависимости от α_A и $\bar{L}(\gamma^+, \gamma^-)$ реализуются различные режимы рефракции УВ [4, 5] (RR ; NR ; RRW).

Задача для нижней области течения решается методом последовательных приближений, который сводит исходную задачу для уравнений коротких волн с неизвестной границей (фронты УВ) к серии краевых задач с фиксированной границей.

4. На рис. 3 изображены картины течений (поля давлений), полученные при численном решении задач рефракции УВ в случаях slow-fast и fast-slow.

На рис. 3, а приведены результаты расчета поля давления при падении УВ сверху на поверхность океана ($P_{10} = 6.3 \cdot 10^{-3}$, $\alpha = 10^0$) при $\alpha^v = 1.0$. Этот случай соответствует переходу от нерегулярной (NR , $\alpha^v \leq 1.0$) к регулярной (RR , $\alpha^v \geq 1.0$) рефракции.

Обращает внимание в этом случае сгущение линий постоянных давлений в окрестности точки А. Сравнение расчетных данных с интерферограммами (см. [1]) (линии равных давлений и плотностей совпадают [4]) показывает их качественное соответствие.

На рис. 3, б приведены результаты расчета поля давлений при падении УВ снизу на поверхность океана при $\alpha^v = 0.5$. Этот случай

соответствует нерегулярному режиму рефракции *NR*. Обращает внимание в этом случае быстрое падение давления (возмущений) при подъеме с глубины к свободной поверхности. Результаты расчета полей давлений согласовываются с экспериментальными данными (см. [2]).

В случае падения ударной волны сверху на поверхность океана (рис. 3, *a*) давление быстро падает с увеличением глубины погружения.

В целом рассмотренные случаи рефракции УВ раскрывают механизмы гашения возмущений, которые природа использует для сохранения окружающей среды.

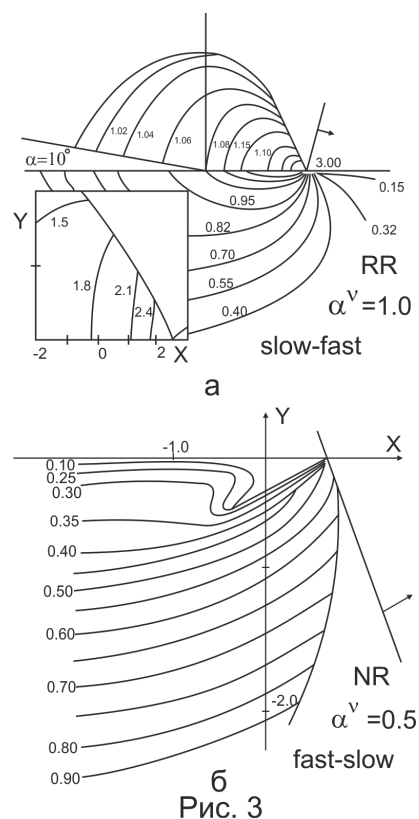


Рис. 3

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Henderson L.F., Ma J., Sakurai A., Takayama K.* Refraction of a shock wave at an air-water interface // *Fluid Dynamics Research*. 1990. №5. P. 337–350.
2. *Henderson L.F., Collela P., Puckett E.G.* On the refraction of shock wave at a slow-fast gas interface // *J. Fluid Mech.* 1991. Vol. 224. P. 1–27.
3. *Шиндяпин Г.П.* Нелинейные взаимодействия ударных волн в газах и газожидкостных средах. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1997. 104 с.
4. *Шиндяпин Г.П., Матутин А.А.* О математических моделях и режимах рефракции ударных волн в газожидкостных пузырьковых средах // Струйные, отрывные и нестационарные течения: тр. XXI Всерос. семинара. Новосибирск: Параллель, 2007. С. 199–201.
5. *Шиндяпин Г.П., Матутин А.А.* О законах подобия рефракции ударных волн в газовых и газожидкостных средах // *Математика. Механика: сб. науч. тр.* Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 146–150.

УДК 533.6.011

Г.П. Шиндяпин, А.В. Сергачёв

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УДАРНЫХ ВОЛН В УСЛОВИЯХ ПАРАДОКСА НЕЙМАНА

Проблема взаимодействия и отражения ударных волн (УВ) в газах и газожидкостных пузырьковых средах (ГЖС) представляет сложную