УДК 624.131+539.215

А.Г. Маркушин

МЕТОД ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ИСТЕЧЕНИЯ СЫПУЧЕГО МАТЕРИАЛА С ТВЕРДЫМ ЗЕРНОМ

Сыпучее тело, отдельные зерна которого не испытывают пластических деформаций ни при каких обстоятельствах его переработки, будем называть твердозёренным сыпучим материалом или сыпучим телом с твердым зерном. Понятно, что предел текучести отдельных зерен подобного сыпучего тела должен быть во много раз большим предела пропорциональности самого сыпучего материала. К таким материалам относятся все каменные породы мелкой фракции, пески и т.д. В основу развиваемой в [1–3] и в настоящей статье теории истечения сыпучего материала положена теория пластического течения сплошной среды при переменных нагружениях [4–7]. Составными элементами этой теории для осесимметричного случая, который здесь рассматривается, являются уравнения равновесия и соотношения теории упругости при осесимметричной деформации, условие пластичности, условие упрочнения при сжатии, ассоциированный закон пластического течения и закон сохранения массы элемента сыпучего тела. Центральным звеном предлагаемой теории движения сыпучей среды является диаграмма $\sigma - \varepsilon$ учета истории нагружения элемента сыпучего материала (см. [2]). В качестве метода приближенного решения задачи теории пластического течения взят метод дополнительных деформаций. Дискретизация краевой задачи для определяющих дифференциальных уравнений выполнена методом конечных разностей. При решении задачи теории пластического течения при переменных нагружениях, процесс истечения из бункера сыпучего материала разбивается на ряд малых этапов, в пределах которых дополнительные деформации предполагаются постоянными во времени (используется квазистатический подход) и определяются по напряженному состоянию в начале этапа. Разрешающие уравнения, необходимые для определения на каждом этапе осесимметричного напряженно-деформированного состояния (НДС) сыпучего тела и его движения под действием собственного веса при истечении из бункера, получим, преобразуя уравнения движения теории упругости в напряжениях [8]:

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} = \rho g. \tag{1}$$

Плотность ρ в уравнениях (1) считаем переменной величиной, которую будем определять решением уравнения, получаемого из закона сохранения массы элемента сыпучего тела

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r \frac{\partial u}{\partial t}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \frac{\partial w}{\partial t}) = 0. \quad (2)$$

При этом обоснование использования уравнения (2) для описания истечения сыпучего тела остается тем же самым (как и его вывод), каким оно является в механике жидкости с тем лишь отличием, что вместо термина «индивидуальная частица» вводится термин «элемент сыпучего тела», имеющий значение достаточно большой совокупности отдельных зерен сыпучего материала. Для реализации метода (см. [4, 5]) дополнительных деформаций все время, необходимое для разгрузки бункера, разделим на достаточно большое число малых интервалов Δt времени, каждый из которых будем называть этапом. Предположим, что на k–м этапе перемещения u^{k-1}, w^{k-1} получили приращения $\Delta u, \Delta w$ и стали равными:

$$u^k = u^{k-1} + \Delta u, w^k = w^{k-1} + \Delta w. \quad (3)$$

Подставив выражения (3) в соотношения, связывающие деформации и перемещения, получим

$$\varepsilon_r^k = \frac{\partial u^k}{\partial r} = \frac{\partial u^{k-1}}{\partial r} + \frac{\partial \Delta u}{\partial r} = \varepsilon_r^{k-1} + \Delta\varepsilon_r,$$

$$\varepsilon_\varphi^k = \frac{u^{k-1}}{r} + \frac{\Delta u}{r} = \varepsilon_\varphi^{k-1} + \Delta\varepsilon_\varphi, \varepsilon_z^k = \varepsilon_z^{k-1} + \Delta\varepsilon_z,$$

$$\gamma_{zr}^k = \gamma_{zr}^{k-1} + \Delta\gamma_{zr}, \theta^k = \varepsilon_r^{k-1} + \varepsilon_\varphi^{k-1} + \varepsilon_z^{k-1} + \Delta\varepsilon_r + \Delta\varepsilon_\varphi + \Delta\varepsilon_z = \theta^{k-1} + \Delta\theta. \quad (4)$$

Подставив затем (4) в соотношения закона Гука, будем иметь

$$\sigma_{rr}^k = \lambda\theta^{k-1} + 2G\varepsilon_r^{k-1} + \lambda\Delta\theta + 2G\Delta\varepsilon_r, \sigma_{\varphi\varphi}^k = \lambda\theta^{k-1} + 2G\varepsilon_\varphi^{k-1} + \lambda\Delta\theta + 2G\Delta\varepsilon_\varphi,$$

$$\sigma_{zz}^k = \lambda\theta^{k-1} + 2G\varepsilon_z^{k-1} + \lambda\Delta\theta + 2G\Delta\varepsilon_z, \tau_{zr}^k = G\gamma_{zr}^{k-1} + G\Delta\gamma_{zr}, \quad (5)$$

где $\lambda = \mu E/((1+\mu)(1-2\mu), G = 0.5E/(1+\mu)$. Здесь и ранее $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{zz}, \tau_{zr}$ – напряжения; $\varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_z, \gamma_{zr}$ – деформации; w – перемещение точки (z, r) в направлении оси z; u – перемещение в направлении радиуса (в тангенциальном направлении перемещение равно нулю); E – модуль Юнга; μ – коэффициент Пуассона. Понятно, что приращения напряжений, происшедшие за время Δt, могут быть представлены в виде

$$\Delta\sigma_{rr} = \lambda\Delta\theta + 2G\Delta\varepsilon_r, \Delta\sigma_{\varphi\varphi} = \lambda\Delta\theta + 2G\Delta\varepsilon_\varphi,$$
$$\Delta\sigma_{zz} = \lambda\Delta\theta + 2G\Delta\varepsilon_z, \Delta\tau_{zr} = G\Delta\gamma_{zr}, \tag{6}$$

и соотношения (5) тогда можно записать следующим образом:

$$\sigma_r{}^k = \sigma_r{}^{k-1} + \Delta\sigma_r, \sigma_\varphi{}^k = \sigma_\varphi{}^{k-1} + \Delta\sigma_\varphi, \tau_{zr}^k = \tau_{zr}{}^{k-1} + \Delta\tau_{zr}. \tag{7}$$

В теории пластического течения, как известно, в случае осесимметричной деформации устанавливается связь между приращениями деформаций $d\varepsilon_r, d\varepsilon_\varphi, d\varepsilon_z, d\gamma_{zr}$, приращениями напряжений $d\sigma_{rr}, d\sigma_{\varphi\varphi}, d\sigma_{zz}, d\sigma_{zr}$ и напряжениями $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{zz}, \sigma_{zr}$. В основу теории пластического течения используемой здесь, положим следующие гипотезы.

1. Вследствие уплотнения сыпучего материала при его движении пределы текучести при сжатии σ_3^t и «растяжении» σ_4^t увеличиваются в сравнении с таковыми σ_1^t, σ_2^t для материала, уложенного насыпью, в зависимости от длины пройденного пути элементом сыпучего тела. Будем считать, что математически в первом приближении эта гипотеза о динамическом уплотнении выражается формулами

$$\sigma_3{}^t = \sigma_1{}^t + (\sigma_{3max}^t - \sigma_1{}^t)w/H, \sigma_4{}^t = \sigma_2{}^t + (\sigma_{4max}^t - \sigma_2{}^t)w/H,$$

где $\sigma_3{}^t, \sigma_4{}^t$ – пределы текучести «идеально» уложенного материала, являющиеся принципиально недостижимыми, при истечении, H – высота засыпки сыпучего материала в бункере.

2. Компоненты тензора приращений пластических деформаций прямо пропорциональны компонентам тензора напряжений.

3. Интенсивность напряжений является функцией интеграла от интенсивности приращений пластических деформаций [9]. Предположим, далее, что упрочнение является изотропным, и приращения деформаций складываются из приращений упругих и пластических деформаций:

$$d\varepsilon_r = d\varepsilon_r^e + d\varepsilon_r^p, d\varepsilon_\varphi = d\varepsilon_\varphi^e + d\varepsilon_\varphi^p, d\varepsilon_z = d\varepsilon_z^e + d\varepsilon_z^p, d\gamma_{zr} = d\gamma_{zr}^e + d\gamma_{zr}^p. \tag{8}$$

Здесь индексами e и p обозначены упругие и пластические составляющие соответственно. Предположим, наконец, что приращения напряжений и упругих деформаций связаны между собой выражениями, аналогичными соотношениям закона Гука:

$$d\varepsilon_r{}^e = 1/[d\sigma_{rr} - \mu(d\sigma_{\varphi\varphi} + d\sigma_{zz)}], d\varepsilon_\varphi{}^e = 1/[d\sigma_{\varphi\varphi} - \mu(d\sigma_{zz} + d\sigma_{rr})],$$

$$d{\varepsilon_z}^e = 1/[d\sigma_{zz} - \mu(d\sigma_{zz} + d\sigma_{\varphi\varphi})], d{\gamma_{zr}}^e = 1/G d\sigma_{zr}. \qquad (9)$$

На роль условия пластичности примем энергетическое условие, по которому наступление пластического состояния определяется только вторым инвариантом девиатора напряжений (что принимается здесь как пробный вариант), т.е. $3|I_2(D)| - [\Phi(q)]^2 = {\sigma_i}^2 - [\Phi(q)]^2 = 0$. На роль параметра упрочения q выберем параметр Удквиста, тогда $\sigma_i = \Phi(q) = \Phi(\int d{e_i}^p)$, т.е. интенсивность напряжений σ_i является функцией параметра Удквиста, не зависящей от вида напряженного состояния. Поэтому считаем, что функцию Φ легко определить из опытов на сжатие материала [9].

Приращения пластических деформаций в соответствие с теорией течения запишем в виде (см. [4, 5]):

$$d{\varepsilon_r}^p = F_\sigma(\sigma_i)(\sigma_{rr} - \sigma)d\sigma_i, d{\varepsilon_\varphi}^p = F_\sigma(\sigma_i)(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma)d\sigma_i,$$

$$d{\varepsilon_z}^p = F_\sigma(\sigma_i)(\sigma_{zz} - \sigma)d\sigma_i, d{\gamma_{zr}}^p = F_\sigma(\sigma_i)\sigma_{zr}d\sigma_i, \qquad (10)$$

$$\sigma_i = sqrt((\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})^2 + 6{\sigma_{zr}}^2)\sqrt{2}. \qquad (11)$$

Значение функции $F_\sigma(\sigma_i)$ может быть найдено с помощью обычной кривой деформирования и определено по формуле (см. [4, 5]):

$$F_\sigma(\sigma_i) = \begin{cases} (1-\mu)/((1+\mu)\sigma_i)(1/E_k - (1-2\mu^2/(1-\mu))/E), \sigma_i > \sigma_i^1 \\ 0, \sigma_i < \sigma_i^1, E_k = \frac{\partial\sigma_i(\varepsilon_i)}{\partial\varepsilon_i} \end{cases} \qquad (12)$$

где σ_i^1 – интенсивность напряжений, соответствующая по кривой деформирования пластической деформации ε_{i1}^p, накопленной к началу рассматриваемого этапа нагружения $\varepsilon_{i1}^p = \int de^p$. Здесь интенсивность дифференциалов пластической деформации вычисляется по формуле

$$de_i^p = sqrt((d\varepsilon_r^p - d\varepsilon_\varphi^p)^2 + (d\varepsilon_\varphi^p - d\varepsilon_z^p)^2 + (d\varepsilon_z^p - d\varepsilon_r^p)^2 + 6(d\gamma_{zr}^p)^2)sqrt(2)/3. \qquad (13)$$

Подставляя (9) и (10) в (8), получим уравнения состояния пластически деформируемой среды по теории течения:

$$d\varepsilon_r = 1/E[d\sigma_{rr} - \mu(d\sigma_{\varphi\varphi} + d\sigma_{zz})] + F_\sigma(\sigma_i)(\sigma_{rr} - \sigma)d\sigma_i,$$

$$d\varepsilon_\varphi = 1/E[d\sigma_{\varphi\varphi} - \mu(d\sigma_{zz} + d\sigma_{rr})] + F_\sigma(\sigma_i)(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma)d\sigma_i,$$

$$d\varepsilon_z = 1/E[d\sigma_{zz} - \mu(d\sigma_{\varphi\varphi} + d\sigma_{rr})] + F_\sigma(\sigma_i)(\sigma_{rr} - \sigma)d\sigma_i,$$

$$d\gamma_{zr} = 1/G d\sigma_{zr} + F_\sigma(\sigma_i)\sigma_{zr}d\sigma_i. \qquad (14)$$

Согласно технике применения метода дополнительных деформаций выполним интегрирование соотношений (14) по времени для k-го этапа разгрузки бункера, в результате получим

$$\Delta\varepsilon_r = 1/E[\Delta\sigma_{rr} - \mu(\Delta\sigma_{\varphi\varphi} + \Delta\sigma_{zz})] + \Delta{\varepsilon_r}^p,$$

$$\Delta\varepsilon_\varphi = 1/E[\Delta\sigma_{\varphi\varphi} - \mu(\Delta\sigma_{zz} + \Delta\sigma_{rr})] + \Delta\varepsilon_\varphi^p,$$
$$\Delta\varepsilon_z = 1/E[\Delta\sigma_{zz} - \mu(\Delta\sigma_{\varphi\varphi} + \Delta\sigma_{rr})] + \Delta\varepsilon_z^p,$$
$$\Delta\gamma_{zr} = 1/G\Delta\sigma_{zr} + \Delta\gamma_{zr}^p, \tag{15}$$

где $\Delta{\varepsilon_r}^p = <{\varepsilon_r}^p> d\sigma_i, \Delta{\varepsilon_\varphi}^p = <\varepsilon_\varphi^p> d\sigma_i, \Delta{\varepsilon_z}^p = <\varepsilon_z^p> d\sigma_i, \Delta\gamma_{zr}^p =$ $= <\gamma_{zr}^p> d\sigma_i$, здесь под $<{\varepsilon_r}^p>, <\varepsilon_\varphi^p>, <\varepsilon_z^p>, <\gamma_{zr}^p>$ понимается среднее значение величин:

$${\varepsilon_r}^k = F_\sigma(\sigma_i)_k(\sigma_{rr} - \sigma)_k, {\varepsilon_\varphi}^k = F_\sigma(\sigma_i)_k(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma)_k,$$

$${\varepsilon_z}^k = F_\sigma(\sigma_i)_k(\sigma_{zz} - \sigma)_k, \gamma_{zr}^k = F_\sigma(\sigma_i)_k\sigma_{zr}^k. \tag{16}$$

Разрешив соотношения (14) относительно приращений напряжений будем иметь

$$\Delta\sigma_{rr} = \lambda\Delta\theta^e + 2G\Delta\varepsilon_r - \lambda\Delta\theta^p - 2G\Delta\varepsilon_r^p, (\Delta\theta^p \neq 0)$$

$$\Delta\sigma_{\varphi\varphi} = \lambda\Delta\theta^e + 2G\Delta\varepsilon_\varphi - \lambda\Delta\theta^p - 2G\Delta{\varepsilon_\varphi}^p,$$
$$\Delta\sigma_{zz} = \lambda\Delta\theta^e + 2G\Delta\varepsilon_z - \lambda\Delta\theta^p - 2G\Delta{\varepsilon_z}^p,$$
$$\Delta\sigma_{zr} = G\gamma_{zr} - G\Delta\gamma_{zr}^p. \tag{17}$$

Подставив (см. [5]) далее соотношения (17) в уравнения (1), использовав при этом соотношения, аналогичные соотношениям Коши,

$$\Delta\varepsilon_r = \frac{\partial\Delta u}{\partial r}, \Delta\varepsilon_\varphi = \frac{\Delta u}{r}, \Delta\varepsilon_z = \frac{\partial\Delta w}{\partial z}, \Delta\gamma_{zr} = \frac{\partial\Delta w}{\partial r} + \frac{\partial\Delta u}{\partial z}, \tag{18}$$

нетрудно получить систему разрешающих уравнений для приращений перемещений, для решения которой необходимо сформулировать краевые условия. Отметим здесь, что решению задачи истечения предшествует решение задачи определения НДС сыпучего тела при закрытом отверстии, что необходимо для правильной работы алгоритма учета истории нагружения элемента сыпучего материала при решении задачи истечения, который описан в работе [2]. Алгоритм решения поставленной задачи с использованием квазистатического подхода описан в статье [10].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Маркушин А.Г.* К построению модели истечения сыпучего материала // Математика, механика и их приложения: материалы науч.-практ. конф. Саратов, 1998.

2. *Маркушин А.Г.* Алгоритм учета истории нагружения элемента сыпучего тела с твердым зерном в задаче истечения // Механика деформируемых сред: межвуз. сб. науч. тр. Саратов, 2002. Вып. 14.

3. *Маркушин А.Г.* Алгоритм решения задачи истечения сыпучего материала с твердым зерном // Математика. Механика. Саратов, 2009. Вып. 11.

4. *Биргер И.А.* Теория пластического течения при неизотермическом нагружении // Изв. АН СССР. Сер. Механика и машиностроение. 1964. № 1.

5. *Маркушин А.Г.* Об основных деталях построения теории истечения сыпучего тела с твердым зерном // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов, 2008. Вып. 10.

6. *Москвитин В.В.* Пластичность при переменных нагружениях. М., 1965.

7. *Шевченко Ю.А.* Термопластичность при переменных нагружениях. Киев, 1970.

8. *Безухов Н.И.* Основы теории упругости, пластичности и ползучести М., 1968.

9. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. М., 1969.

10. *Маркушин А.Г.* Квазистатический подход в решении задачи истечения сыпучего тела с твердым зерном // Проблемы прочности элементов конструкций под воздействием нагрузок и рабочих сред: межвуз. науч. сб. Саратов, 2004.

УДК 539.3

В.Ю. Ольшанский, Ю.Н. Нагар, А.В. Серебряков

ПОСТРОЕНИЕ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ ПЬЕЗОГИРОСКОПА

Развивается математическая модель пьезогироскопа, предназначенного для измерения угловой скорости вращения объекта. Чувствительный узел состоит из пьезокерамических пластин Π_1, Π_2. Пластины поляризованы вдоль толщин. Одно из оснований каждой пластины закреплено, другое – контактирует с грузом массы M. Действие груза на пластины приводится к нормальному механическому усилию, распределенному по площади основания A [1].

На пластину Π_1 по толщине действует переменный электрический ток, возбуждающий за счет пьезоэффекта механические колебания с перемещениями $u_1(x_1, t)$ в направлении Ox_1. Эти колебания передаются присоединенной массе. Если платформа с пьезогироскопом вращается с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$ относительно инерциальной системы отсчета, то на массу M действует кориолисова сила $\mathbf{F}_c = -2M(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}_r)$. Наличие компонента Ω_3, коллинеарного оси Ox_3, приводит к давлению