УДК 532.5:533.6.011.5

И.А. Чернов

КВАДРАТУРЫ В ОБОБЩЕННОЙ АВТОМОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ О СИЛЬНОМ ВЗРЫВЕ

Задача о сильном точечном взрыве в автомодельной постановке была решена Л.И. Седовым и Тейлором. Ударная волна (УВ) возникает в результате выделения конечной энергии в точке (на линии, на плоскости). Эта энергия передается движущемуся газу и является характерной и постоянной величиной данного физического процесса, что дало возможность Л.И. Седову найти интеграл системы трех обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений (ОДУ). Наличие такого интеграла позволяет в аналитической форме представить решение всей системы ОДУ, выполнив две квадратуры в общем виде.

Основные уравнения и решение Седова. Изучаются одномерные неустановившиеся адиабатические течения совершенного газа для трех случаев симметрии. Течение характеризуется скоростью $u = u(r,t)$, плотностью $\rho = \rho(r,t)$ и квадратом локальной скорости звука $c_2 = c_2(r,t)$, который с точностью до коэффициента совпадает с абсолютной температурой (далее $\nu = \{1,2,3\}$ для {плоской, цилиндрической, сферической} симметрий потока). Основные уравнения таковы:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\rho + \rho\frac{\partial}{\partial r}u + \frac{(\nu-1)\rho u}{r} = 0\,, && \gamma\frac{d}{dt}u + \frac{\partial}{\partial r}c_2 + c_2\frac{\partial}{\partial r}\ln(\rho) = 0\,, \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{c_2}{\rho^{\gamma-1}}\right) = 0\,, && \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial r}\,. \end{aligned} \qquad (1)$$

Предполагая изучение автомодельных задач, зададим искомые функции в форме [1]

$$\lambda = \frac{r}{b^{\frac{1}{m}}t^{\delta}}\,, \quad u = \frac{r}{t}V(\lambda)\,, \quad \rho = \frac{a}{r^{\kappa+3}t^{s}}R(\lambda)\,, \quad c_2 = \left(\frac{r}{t}\right)^2 Z(\lambda)\,. \qquad (2)$$

Здесь a, b – две размерные величины с независимыми размерностями, входящие в формулировку конкретной задачи. Их размерности:

$$[a] = M \cdot L^{\kappa} \cdot T^{s}\,, \quad [b] = L^{m} \cdot T^{-m\delta},$$

где M – масса, L – длина, T – время.

Подстановка (2) в основную систему (1) дает одно ОДУ первого порядка для определения зависимости $Z = Z(V)$ (здесь введен параметр $\kappa = \frac{s+2+\delta\cdot(\kappa+1)}{\gamma}$ вместо s):

$$\frac{dZ(V)}{dV} = \big(Z(V)[[2(V-1)+\nu(\gamma-1)V](V-\delta)^2 - \\ -(\gamma-1)V(V-1)(V-\delta) - [2(V-1)+\kappa(\gamma-1)]Z(V)) \\ /\left((V-\delta)[V(V-1)(V-\delta)+(\kappa-\nu V)Z(V)]\right)\big). \tag{3}$$

Если функция $Z = Z(V)$ найдена, то следует выполнить две квадратуры для нахождения $\lambda = \lambda(V)$ и $R = R(V)$

$$\frac{d\ln\lambda(V)}{dV} = \frac{Z(V)-(V-\delta)^2}{V(V-1)(V-\delta)+(\kappa-\nu V)Z(V)} \\ (V-\delta)\frac{d\ln R(V)}{d\ln\lambda(V)} = [s+(\kappa-\nu+3)V]- \\ -\frac{V(V-1)(V-\delta)+(\kappa-\nu V)Z(V)}{Z(V)-(V-\delta)^2}. \tag{4}$$

Система (3), (4) содержит 4 величины $\gamma, \delta, s, \kappa$ (общий автомодельный случай).

Три зависимости $\{Z = Z(V), R = R(V), \lambda = \lambda(V)\}$ параметрически определяют три искомые функции $\{V = V(\lambda), R = R(\lambda), Z = Z(\lambda)\}$.

При $\kappa = \dfrac{\nu\delta}{\gamma}$ уравнение (3) имеет частное решение

$$Z(V) = -\frac{(\gamma-1)V^2(V-\delta)\gamma}{2(\gamma V-\delta)},$$

которое впервые было найдено Л.И. Седовым [1]. Оно описывает течение, происходящее при сильном взрыве при условии сохранения полной энергии всей массы газа.

Квадратуры. Вычисляя интеграл от правой части равенства (4), определим $\ln(\lambda(V))$, затем $\lambda(V)$. Постоянную интегрирования найдем из условия $\lambda = 1$ при $V = V_2 = 2\delta/(\gamma+1)$ согласно методике, представленной в [1, 2].

В результате получим

$$\lambda(V) = \left(\frac{V}{V_2}\right)^{n_0}\left(\frac{2V-2+V\nu\gamma-V\nu}{V_2\gamma\nu+2V_2-V_2\nu-2}\right)^{n_1}\left(\frac{\gamma V-\delta}{V_2\gamma-\delta}\right)^{n_3},$$

где $n_0 = -\delta$, $n_3 = -\dfrac{\delta(\gamma - 1)}{2\delta - 2\gamma + \nu\gamma\delta - \nu\delta}$,

$$n_1 = \big(2\gamma^2 + 2\gamma + 2\nu\delta - 4\delta - 2\gamma^2\nu\delta - 4\gamma\delta + \delta^2\nu^2\gamma^2 + 4\delta^2 -$$
$$- 4\delta^2\nu + \delta^2\nu^2 - 2\delta^2\nu^2\gamma + 4\delta^2\nu\gamma\big) \,/\, ((2\delta - 2\gamma + \nu\gamma\delta - \nu\delta)\,(2 + \nu\gamma - \nu))\,.$$

Вычисляя вторую квадратуру с соответствующими преобразованиями, найдем

$$R(V) = \left(\frac{V}{V_2}\right)^{m_0} \left(\frac{2V - 2 + V\nu\gamma - V\nu}{V_2\gamma\nu + 2V_2 - V_2\nu - 2}\right)^{m_1} (V - \delta)^{m_2} \left(\frac{\gamma V - \delta}{V_2\gamma - \delta}\right)^{m_3},$$

где

$$\begin{aligned}
&m_0 = -\delta + \nu\delta - k\delta - 2\,,\\
&m_1 = \big(\big(2\gamma^2 + 2\gamma + 2\nu\delta - 4\delta - 2\gamma^2\nu\delta - 4\gamma\delta + \delta^2\nu^2\gamma^2 + \\
&\quad + 4\delta^2 - 4\delta^2\nu + \delta^2\nu^2 - 2\delta^2\nu^2\gamma + 4\delta^2\nu\gamma\big)\,\big(-\nu^2\gamma\delta + \\
&\quad + \nu\gamma\delta + \nu\gamma\delta k + 2\nu\gamma + \nu^2\delta - 3\nu\delta - \nu\delta k + 2k\delta + 2\delta - \\
&\quad -2 - 2k)\big) / \left((-2 + 2\delta + \nu\gamma\delta - \nu\delta)\,(2\delta - 2\gamma + \nu\gamma\delta - \right.\\
&\quad \left. -\nu\delta)\,(2 + \nu\gamma - \nu)\right)\,,\\
&m_2 = -\frac{2\gamma\delta + \nu\gamma\delta - 2\gamma - 2 + 2\delta - \nu\delta}{-2 + 2\delta + \nu\gamma\delta - \nu\delta}\,,\\
&m_3 = -\frac{\gamma\delta k - \nu\gamma\delta + 2\gamma + \gamma\delta - 3\delta - k\delta + \nu\delta}{2\delta - 2\gamma + \nu\gamma\delta - \nu\delta}\,.
\end{aligned}$$

Если в данных показателях положить

$$\kappa = -3 - \frac{1}{2}s\nu - s + \frac{1}{2}s\omega + \omega\,, \qquad \delta = \frac{2}{\nu + 2 - \omega}\,,$$

то получим решение о распространении сильной УВ по газу переменной начальной плотности, зависящей от расстояния до места взрыва в виде ($A = \mathrm{const}$)

$$\rho = A \cdot r^{-\omega}\,.$$

Показатели степеней в выражении для $R(V)$ примут вид

$$
\begin{aligned}
& n_{00} = -\frac{2}{2+\nu-\omega}\,, \\
& n_{11} = \left(-8\nu + 4\nu^2 + 4\omega + 8\nu\gamma - 4\gamma + \nu^2\gamma^2 - 3\nu^2\gamma - 2\gamma\nu\omega - \right. \\
& \quad \left. - 2\nu\omega - 4\gamma^2\omega + \gamma^2\omega^2 + \gamma\omega^2 + 4\gamma^2\right) / \left((2+\nu ga-\nu)\right. \\
& \quad \left.(2+\nu-\omega)(2-2\gamma+\gamma\omega-\nu)\right)\,, \\
& n_{33} = -\frac{\gamma-1}{2-2\gamma+\gamma\omega-\nu}, \\
& m_{00} = s, \\
& m_{11} = -\frac{1}{2}\left((-2\nu+\nu\gamma s-2s\nu+2\omega+s\omega)\left(8\nu\gamma-4\gamma-8\nu+\right.\right. \\
& \quad + 4\gamma^2 + 4\nu^2 - 3\nu^2\gamma + \nu^2\gamma^2 - 2\gamma\nu\omega + 4\omega - 2\nu\omega - \\
& \quad \left.\left. - 4\gamma^2\omega + \gamma^2\omega^2 + \gamma\omega^2\right)\right) / \left((2+\nu\gamma-\nu)(2-2\gamma+\gamma\omega-\nu)\right. \\
& \quad \left.(-2\nu+\omega+\nu\gamma)\right)\,, \\
& m_{22} = -\frac{\gamma\omega-2\nu+\omega}{-2\nu+\omega+\nu\gamma}\,, \\
& m_{33} = \frac{1}{2}\frac{\nu\gamma s+2\gamma s-\gamma s\omega-s\nu-2s+s\omega+2\omega-2\nu}{2-2\gamma+\gamma\omega-\nu}.
\end{aligned}
$$

Представленное автомодельное решение является обобщением известных результатов. В частности, Н.С. Мельникова изучала случай с $\nu = 3$, $s = 0$ (см. [1, 2]). Альтернативная физическая интерпретация этого решения предложена в статье [3].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерностей в механике. 5-е изд. М.: Наука, 1965. 386 с.

2. *Коробейников В.П., Мельникова Н.С., Рязанов Е.В.* Теория точечного взрыва. М.: Наука, 1961. 332 с.

3. *Чернов И.А.* Трактовка решения Седова как серии промежуточных асимптотик в течении от сильного взрыва // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. Т. 18, № 4. 2010. С. 33–43.

УДК 517.984

Г.П. Шиндяпин, А.А. Матутин

РЕФРАКЦИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ОКЕАНА

Задачи рефракции ударных волн (УВ) на поверхности океана вызывают неизменный теоретический интерес исследователей [1–4] и представляют практический интерес для многочисленных приложений.