УДК 539.3

О.А. Торопова

УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО НЕФТЕПОДЪЕМНИКА С ПЕРЕМЕННОЙ ВДОЛЬ ОБРАЗУЮЩЕЙ ТОЛЩИНОЙ СТЕНКИ

В [1] получены нелинейные уравнения, описывающие напряженно деформированное состояние глубоководного нефтеподъемника, находящегося под действием внутреннего потока гидросмеси и внешнего потока окружающей жидкости. При этом материал стенок трубопровода считался нелинейно-упругим, а толщина стенки – переменной вдоль образующей.

В настоящей статье обсуждаются возможные варианты следствий из предлагаемых в ней новых уравнений. Выбираем в качестве независимой переменной вертикальную координату $x_2 = x$ и введем для (12), (13) следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\begin{gathered}
x^0 = x/H,\ T^0 = T/w_0H,\ N^0 = N/\mu w_0 H,\ k^0 = kHJ,\ \Phi^0 = \Phi H,\\
u^0 = u/H,\ v_c^0 = v_c/v_0\ (v_0 = 1\text{м}/c),\ v_{f0}^0 = v_{f0}/v_0,\ \mu = (E_0 I_0/w_0 H^3)^{1/2},\\
\Theta_1 = \Theta_1(x)D/D_0,\ \Theta_2 = \Theta_2(x) = d/d_0,\ c = D_0/d_0 > 1,\ \gamma_1 = 1/(1-c^{-2}),\\
\gamma_2 = 1/(c^2-1),\ \gamma_3 = 1/(1+c^{-2}),\ \gamma_4 = 1/(1+c^2),\ \gamma_5 = \gamma_1(1-\rho_w/\rho_t),\ \gamma_6 = \gamma_2(1-\rho_f/\rho_t),\\
\gamma_7 = (\rho_f v^2/\rho_t g H)\gamma_2,\ \gamma_8 = (\rho_w v^2/\rho_t g H)\gamma_1,\ \gamma_9 = (2c_n\rho_w v^2/g\rho_t\pi D_0)\gamma_1,\ \gamma_{10} = 2\rho_t g H^2/E_0 D_0,\\
a_1 = \gamma_1\Theta_1^2 - \gamma_2\Theta_2^2,\ a_2 = 1/(\gamma_1\Theta_1^2 - \gamma_2\Theta_2^2)(\gamma_3\Theta_1^2 - \gamma_4\Theta_2^2),\ a_3 = \gamma_5\Theta_1^2 - \gamma_6\Theta_2^2,\\
a_4 = \gamma_7 a_2/\Theta_2^2,\ a_5 = \gamma_8\Theta_1^2 a_2,\ a_6 = \gamma_9\Theta_1,\ \sigma_{()}^0 = 2\sigma_{()}H/E_0 D_0,\\
\rho^0 = (2/D_0)\rho\ (\Theta_2/c \le \rho^0 \le \Theta_1),\ \sigma_i^0 = \sigma_t^0 + \sigma_b^0,\ \sigma_t^0 = \gamma_{10}T^0/a_1, \Psi(k^0) = (\partial\Phi^0/\partial k^0)^{-1}.
\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $w_0 = 0.25\pi\rho_t(D_0^2 - d_0^2)g$ – погонный вес трубопровода в нижнем граничном сечении ($\Theta_j(0) \equiv 1,\ j = 1,2$), v_{f0} – скорость потока гидросмеси при $x^0 = 0$. После подстановки (1) в [1, (12) и (13)] и проведения необходимых преобразований (опуская здесь и в дальнейшем верхний индекс ноль в обозначениях безразмерных величин), рассматриваемая задача сформулируется окончательно в виде:

$$\left\{\begin{array}{l} y' = f(x,y,z;\mu),\ \mu z' = p(x,y)q(z) + r(x,y,z,\mu),\\ \Gamma_0(Y(0)) = 0,\ \Gamma_1(Y(1)) = 0,\ Y = \{y,z\}^t, \end{array}\right. \tag{2}$$

где $y = \{T,\varphi,u\}^t$ ($\{...\}^t$ – операция транспонирования), $z = \{N,K\}^t$,

$$f = \{a_1 + \mu a_2 kN/\cos\varphi,\ a_2 k/\cos\varphi,\ -\operatorname{tg}\varphi\}^t, P = \{P_{ij}\}:\ P_{11} = -P_1,$$

$$P_{22} = -1, P_{12} = P_{21} = 0,\ P_1 = (a_2 T - a_4 v_{f0}^2 - a_5 v_c^2 \sin^2\varphi)/\cos\varphi,$$

$$q(z) = \{k, \Psi(k)N\}^t, r = \{r_1, r_2\}^t,\ r_1 = -a_3 \operatorname{tg}\varphi + a_6 v_c |v_c \cos\varphi|,$$

$$r_2 = -\mu(\partial\Phi/\partial J)(\partial J/\partial x)(\Psi(k)/\cos\varphi);$$

$$\Gamma_0 : |R^5 \to |R^2,\ \Gamma_1 : |R^5 \to |R^3,\ ()' = d()/dx.$$

Из системы (2) можно получить ряд нижеприведенных следствий. Уравнения нелинейно-упругого нефтеподъемника с постоянной толщиной стенки имеют вид

$$\Theta_1(x) = \Theta_2(x) \equiv 1,\ v_{f0} = v_f = \text{const},$$

$$a_i(x) = \text{const}\ (i = 1, ..., 6),\ J(x) \equiv 1.$$

Пусть, например, диаграмма деформирования материала стенок нефтеподъемника аппроксимируется полиномом третьего порядка $\sigma_b = E_0\varepsilon - E_1\varepsilon^3$. После подстановки зависимости в выражение [1, (11)] для изгибающего момента и проведения необходимых преобразований, определяем

$$\Phi(k) = k - k^3/3k_*^2, \tag{3}$$

где $k_* = 2/3((3E_0/E_1)(H/D))^{1/2}$ – наименьшее значение $k = k(x)$, для которого $d\Phi/dk = 0$. Получаем искомое выражение для функции $\Psi(k)$, входящей в (2), в виде

$$\Psi(k) = 1/(1 - (k/k_*)^2),\ k < k_*. \tag{4}$$

Аналогичным образом можно получить значения функции $\Psi(k)$ для любого другого аналитического типа зависимости $\sigma_b = \sigma_b(\varepsilon)$.

Считая известными параметры $D_0, d_0, c_n, \rho_t, \rho_f, \rho_w, T_1, H,$ профиль скорости подводных течений $v_c = v_c(x),\ 0 \le x \le 1$, вид диаграммы деформирования, например, в форме кубической параболы (3) с известными значениями параметров E_0, E_1, основной задачей является определение из решения (2) характеристик НДС нефтеподъемника, исходя из условия сохранения его прочности:

$$\sigma_* \le \sigma_R, \tag{5}$$

где σ_R – известное расчетное сопротивление материала стенок нефтеподъемника, $\sigma_* = \max\limits_{x,\rho} \sigma_i$. С этой целью для любого фиксированного сечения x необходимо определить значения:

$$\sigma_i = \sigma_i(\rho; x) = k\rho - (k^3/3k_*^2)\rho^3 + \gamma_{10}T(x),\ \rho_1 \le \rho \le 1,\ \rho_1 = d_0/D_0 \quad (6)$$

и найти $\sigma_* = \max\limits_{\rho,x} \sigma(\rho; x)$.

Получим также уравнения линейно-упругого нефтеподъемника с переменной толщиной стенки:

$$\Phi(k) = k,\ \Psi(k) = 1,\ q(z) = z^* = \{k, N\}^t.$$

Уравнения линейно-упругого нефтеподъемника с постоянной толщиной стенки сформулируем следующим образом [2, 3]:

$$\Phi(k) = k,\ \Psi(k) = 1,\ q(z) = z^* = \{k, N\}^t,\ \Theta_1(x) = \Theta_2(x) \equiv 1,$$

$$v_{f0} = v_f = \text{const},\ a_i(x) = \text{const},\ (i = 1, ..., 6),\ J(x) \equiv 1.$$

Отличительной особенностью системы (2) является наличие малого параметра μ при старшей производной от зависимой переменной, так как для глубоководных трубопроводов (то есть при $H \ge 1000$м) значение $\mu \sim 10^{-4} \div 10^{-3}$. Таким образом, сформулированные в этой статье модельные уравнения, описывающие статические характеристики глубоководного нефтеподъемника в вертикальной плоскости стационарного потока подводных течений, относятся к классу нелинейных сингулярно возмущенных дифференциальных систем. Тем самым возникает необходимость в асимптотическом анализе сформулированных выше уравнений, который позволит выявить особенности поведения искомого решения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Торопова О.А.* Формулировка уравнений равновесия для нелинейно-упругого нефтеподъемника // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов, 2010. Вып. 12. С. 189–192.

2. *Торопова О.А.* Метод параметризации граничных условий в нелинейных краевых задачах прикладной механики// Математические методы в технике и технологиях ММТТ-20: сб. тр. XX Междунар. конф. Ярославль, 2007.

3. *Торопова О.А.* Применение метода пограничных функций в задачах расчета статических характеристик глубоководных нефтеподъемников//Актуальные проблемы теории управления и прикладного системного анализа: материалы Всерос. науч. конф. Саратов, 2006.