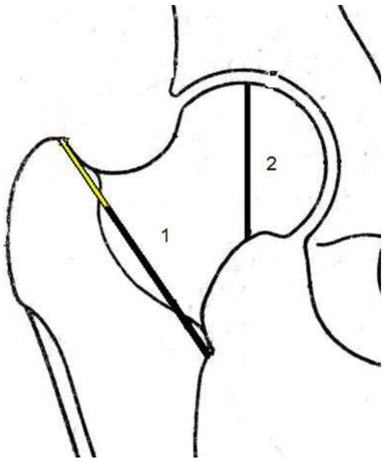

Рис. 3

Представленная в статье модель может быть использована для прогнозирования результатов различных видов операционного вмешательства, например таких как ваизирующая межвертельная остеотомия с медиализацией дистального фрагмента (см. [1]) на проксимальном отделе бедренной кости с целью получения оптимального результата.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Гиммельфарб А.Л.* Биомеханические аспекты межвертельной остеотомии при коксартрозе // Сборник Казанского НИИ травматологии и ортопедии №XXVI.

2. *Янсон Х.А.* Биомеханика нижней конечности человека. Рига, 1975.

3. *Ansys 11.0* Academic research help. // URL:http://www.ansys.com/

4. *Барышев А.А., Аранович В.М., Сидоренко О.В.* Трехмерное моделирование костных тканей человека с использованием компьютерной томографии // Методы компьютерной диагностики в биологии и медицине. 2009. Саратов, 2009.

5. A comparative study on different methods of automatic mesh generation of human femurs. Medical Engeneering and Physics 20 (1998).// URL:http://www.materialise.com/

УДК 539.3

А.В. Аристамбекова, О.М. Ромакина

СТАТИЧЕСКАЯ И ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧИ ИЗГИБА КВАДРАТНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ

Рассмотрим квадратную пластинку, изготовленную из изотропного материала. Размеры пластинки в плане $a \times a$, толщина h считается малой. В угловых точках пластинка подкреплена шарнирами, а её контур свободен. На пластинку действует нормальная нагрузка интенсивности $q(x, y)$.

Для определения НДС в задачах статики и изгиба такой пластинки применяется модифицированный метод сплайн-коллокации [1].

Считаем справедливыми гипотезы классической теории Кирхгофа.

Тогда уравнение для определения прогибов $w(x,y,t)$ такой пластинки от распределенной нагрузки интенсивности $q(x,y,t)$ имеет вид

$$D\nabla^2\nabla^2 w = q(x,y) + \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

В случае установившихся колебаний справедливы представления

$$q(x,y,t) = q_0(x,y)\exp^{i\omega t},\ \ w(x,y,t) = \tilde{W}(x,y)\exp^{i\omega t}.$$

Тогда получим уравнение

$$\frac{\partial^4 \tilde{W}}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \tilde{W}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \tilde{W}}{\partial y^4} + \frac{\rho h \omega^2 \tilde{W}}{D} = \frac{q_0(x,y)}{D}. \tag{1}$$

Здесь обозначено $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — жесткость пластинки на изгиб, E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала пластинки соответственно.

Введем безразмерные величины: координаты $\xi = x/a, \eta = y/a$ и амплитуду прогиба $W(\xi,\eta) = \tilde{W}(x,y)/h$. Тогда уравнение (1) перепишем в виде

$$\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} + \frac{\rho h^2 \omega^2 a^4 W}{D_*} = \frac{q(\xi,\eta)}{D_*}. \tag{2}$$

Внутренние усилия и моменты связаны с $W(\xi,\eta)$ соотношениями:

$$M_x = -D_* a^2\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \nu\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2}\right), M_y = -D_* a^2\left(\nu\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2}\right),$$

$$H_x y = -(1-\nu) D_* a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta},$$

$$Q_x^* = -D_* a\left[\frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 W}{\partial \xi \partial \eta^2}\right],$$

$$Q_y^* = -D_* a\left[(2-\nu)\frac{\partial^3 W}{\partial \xi^2 \partial \eta} + \frac{\partial^3 W}{\partial \eta^3}\right]. \tag{3}$$

В уравнении (2) и формулах (3) обозначено $D_* = \frac{Eh_0^4}{12(1-\nu^2)}, h_0 = h/a$. Решение уравнения (2) должно удовлетворять граничным условиям при $\xi = 0$ и $\xi = 1$

$$M_x = Q_x^* = 0, \tag{4}$$

при $\eta = 0$ и $\eta = 1$

$$M_y = Q_y^* = 0. \tag{5}$$

Так как угловые точки пластинки подкреплены шарнирами, то в этих точках должны выполняться условия:

в точках $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$

$$W = M_y = 0. \tag{6}$$

Решение уравнения (2) ищем согласно модифицированному методу сплайн-коллокации в следующем виде [1]:

$$W(\xi, \eta) = \sum_{j=-2}^{N+2} B_{5,j}(\xi) W_j(\eta), \tag{7}$$

где $B_{5,j}(\xi)$ – B-сплайны пятой степени [2], которые определены на системе узлов $\xi_{-5} < \xi_{-4} < \dots < \xi_0 < \dots < \xi_N < \dots < \xi_{N+5}; \xi_i = i/N \left(i = \overline{-5, N+5}\right)$ и обладают свойством: при $\xi \leq \xi_{i-3}$ и $\xi \geq \xi_{i+3}$ $B_{5,j}(\xi) \equiv 0$.

Потребуем, чтобы выражения M_x и Q_x^* из (3) удовлетворяли условиям (4) при $\xi = 0$ и $\xi = 1$. Тогда после некоторых преобразований для функций $W_j(\eta)$ и $W_{N+j}(\eta) (j = 1, 2)$ получим зависимости вида

$$\frac{d^2 W_{-j}}{d\eta} = \sum_{k=-2}^{2} a_{j,k} W_k(\eta) + \sum_{r=0}^{2} b_{j,r} \frac{d^2 W_r}{d\eta^2},$$

$$\frac{d^2 W_{N+j}}{d\eta} = \sum_{k=N-2}^{N+2} a_{j+2,k} W_k(\eta) + \sum_{r=0}^{2} b_{j+2,N+r} \frac{d^2 W_{N-r}}{d\eta^2}, (j = 1, 2), (r = \overline{0, 2}), \tag{8}$$

с известными коэффициентами $a_{s,k}$, $b_{s,r}$.

Подставим (7) в (2) и потребуем его выполнения в $N + 1$ точках коллокации, тогда получим

$$\frac{d^4 \overline{W}}{d\eta^4} = B_2 \frac{d^2 \overline{W}}{d\eta^2} + B_0 \overline{W} + \overline{R_1} W_{-1} + \overline{R_2} W_{-2} + \overline{R_3} W_{N+1} + \overline{R_4} W_{N+2} + \overline{Q} \tag{9}$$

с известными матрицами B_2, B_0 и векторами $\overline{R_1}$, $\overline{R_2}$, $\overline{R_3}$, $\overline{R_4}$, $\overline{Q}$.

Уравнения (8) и (9) составляют полную систему для определения всех неизвестных функций $W_r(\eta)$ $(r = \overline{0, N})$.

Для численного решения задачи от полученной полной системы уравнений переходим к системе дифференциальных уравнений первого порядка, коэффициенты которых в общем случае зависят от ω. Для этой системы граничные условия записываются согласно способам закрепления сторон $\eta = 0$ и $\eta = 1$ с учетом условий в угловых точках.

Если положим во всех формулах $\omega = 0$, то получим статическую краевую задачу, которая решается численно устойчивым методом дискретной ортогонализации С.К. Годунова.

Были получены решения статической и динамической задач об изгибе пластинки под действием распределённой нагрузки.

Изгибающая пластинку нагрузка принимается в виде

$$q(\xi, \eta, t) = p_0 \sin(\omega t), \ \ p_0 = \mathrm{const}.$$

Вычисления выполнены для двух пластинок:

1) стальной ($E = 2.0 \cdot 10^5$ МПа);

2) алюминиевой ($E = 7.0 \cdot 10^4$ МПа).

В случае статической задачи ($\omega = 0$) был получен график изогнутой поверхности стальной пластинки.

Максимальный прогиб в центре такой пластики $\max W = 1,393 \cdot 10^{-4}$, для пластинки, изготовленной из алюминия, $\max W = 3,893 \cdot 10^{-4}$.

В случае задачи о колебаниях вычислены первые три резонансные частоты стальной и алюминиевой пластинок. В таблице представлены значения частот $\omega_k^* = \omega_k^{rez} - \delta$ ($\delta < 0,1\ c^{-1}$ при $k = 1$ и $\delta < 1\ c^{-1}$ при $k = 2, 3$).

Частоты	Сталь	Алюминий
ω_1^*	108.9	110.5
ω_2^*	680	686
ω_3^*	1412	1424

Графики изогнутой поверхности для пластинок качественно похожи. Были получены графики для первых трех резонансных частот.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Недорезов П.Ф., Шевцова Ю.В., Ромакина О.М.* Модифицированный метод сплайн-коллокации в задачах изгиба прямоугольных пластинок // Математическое моделирование и краевые задачи: тр. II Всерос. науч. конф. Самара, 2005. Ч. 1. С. 203–209.

2. *Завьялов Ю.С.* Методы сплайн-функций. М., 1980. 352 с.