2. *Каплунов Ю.Д., Кириллова И.В., Постнова Ю.А.* Дисперсия волн в плоском акустическом слое с гибкими упругими стенками // Акустический журн. 2004. Т. 50, № 6. С. 802–807.

УДК 539.3

А.А. Барышев, Е.А. Номеровская

АНАЛИЗ НДС И ТЕПЛОВОГО ПОЛЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНКИ

Постановка задачи и основные соотношения

В статье рассматривается изотропная кольцевая пластинка малой толщины h, внутренний радиус которой R_1, внешний – R_2, изготовленная из вязкоупругого материала, свойства которого зависят от температуры. На срединной плоскости введена цилиндрическая система координат. Считаем, что пластинка испытывает малые деформации под действием распределенной по плоскости $z = -h/2$ поперечной нагрузки с частотой ω

$$q(r,t) = q_1(r)\cos(\omega t) + q_2(r)\sin(\omega t). \tag{1}$$

Предположим, что компоненты тензоров напряжения и деформаций связаны линейным законом вязкоупругости:

$$\sigma_r = \frac{1}{1-\nu^2}\int_{-\infty}^{t} K(t-\tau,\Theta,\omega)(\epsilon_r(\tau)+\nu\epsilon_\phi(\tau))d\tau,$$

$$\sigma_\phi = \frac{1}{1-\nu^2}\int_{-\infty}^{t} K(t-\tau,\Theta,\omega)(\nu\epsilon_r(\tau)+\epsilon_\phi\tau))d\tau, \tag{2}$$

$$\tau_{rz} = \frac{1}{2(1+\nu)}\int_{-\infty}^{t} K(t-\tau,\Theta,\omega)\gamma_{rz}(\tau)d\tau, \nu = \mathrm{const},$$

где ν — коэффициент Пуассона, t — время, $\Theta = \Theta(r,z)$ — неизвестная безразмерная установившаяся температура саморазогрева, $\epsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \epsilon_\phi = = \frac{u_r}{r}, \gamma_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}$ — компоненты тензора малых деформаций, u_r, u_z — компоненты вектора перемещений.

Уравнения движения малого элемента пластинки будут следующими:

$$\frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{M_r + M_\phi}{r} = N_r, \frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{N_r}{r} = \rho h\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - q(r,t). \tag{3}$$

Здесь M_r — изгибающий момент, N_r — перерезывающая сила, ρ — плотность материала пластинки.

Решение будем проводить на основе метода гипотез.

Классическая модель (Модель Кирхгоффа)

На основе гипотез Кирхгоффа запишем поле перемещений в виде

$$u_r(r,z) = -z\frac{\partial w}{\partial r}, u_z = w(r,t), \tag{4}$$

где $w(r,t)$ – прогиб, $u_r(r,z)$ – тангенциальное смещение точек пластинки.

Модель Тимошенко [1]

В этом случае для компонент вектора перемещения запишем

$$u_r = z\gamma(r,t), u_z = w(r,t), \tag{5}$$

где $\gamma(r,t)$ – искомая функция, характеризующая угол поворота нормали к срединной плоскости.

Будем искать неизвестные функции в следующей форме:

$$z(r,t) = z_1(r)\cos(\omega t) + z_1(r)\sin(\omega t).$$

Для этих моделей разрешающие уравнения определения напряженно-деформированного состояния (НДС) пластинки имеют вид

$$\frac{dw_k}{dr} = -\theta_k + C_T(-1)^{k-1}\sum_{j=1}^{2} b_{k+j-1}(\Theta)N_r^{(j)},$$

$$\frac{d\theta_k}{dr} = -\frac{\nu}{r}\theta_k + (-1)^{k-1}\sum_{j=1}^{2} d_{k+j-1}(\Theta)M_r^{(j)},$$

$$\frac{dM_r^{(k)}}{dr} = N_r^{(k)} - \frac{1-\nu}{r}M_r^{(k)} + \frac{1-\nu^2}{r^2}\sum_{j=1}^{2} D_{k+j-1}(\Theta)\theta_j, \tag{6}$$

$$\frac{dN_r^{(k)}}{dr} = -\frac{N_r^{(k)}}{r} - \rho h\omega^2 w_k - q_k(r,t).$$

Здесь $d_k = \frac{D_k}{D_1^2+D_2^2}, b_k = \frac{B_k}{B_1^2+B_2^2}$.

Если в уравнениях (6) положить $C_T = 0, \theta_k = -\frac{\partial w_k}{\partial r}$, то они описывают НДС по модели Кирхгоффа, при $C_T = 1, \theta_k = \gamma_k$ – по модели Тимошенко.

Поскольку свойства материала зависят от температуры $\Theta(r,z)$, то необходимо рассмотреть уравнение теплопроводности. Для определения максимально возможной температуры саморазогрева при вычислении мощности источников тепла $Q(r,z)$ считаем, что вся работа внешних сил переходит в тепло. Мощность за цикл колебаний определяется формулой

$$Q(r,z) = -\frac{E_2\omega}{2(1-\nu^2)}\left(\sum_{k=1}^{2}((\epsilon_r^{(k)})^2 + (\epsilon_\phi^{(k)})^2 + 2\nu\epsilon_r^{(k)}\epsilon_\phi^{(k)}) + \frac{1-\nu}{2}(\gamma_{rz}^{(k)})^2\right). \quad (7)$$

В случае модели Кирхгоффа слагаемое с функцией $\gamma_{rz}^{(k)}$ равно нулю.

Уравнение теплопроводности в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial r} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2} + \frac{1}{\lambda_\nu T_s}Q(r,z) = 0. \quad (8)$$

Здесь $\Theta = \frac{T-T_0}{T_s}, T_s = T_0 - T_1, T_0, T_1$ – характерные температуры, λ_ν – коэффициент теплопроводности материала.

Полученные уравнения должны удовлетворять граничным условиям. НДС:

при $r = R_1$ $w = 0, \frac{\partial w}{\partial r} = 0, (w = 0, \gamma = 0)$;

при $r = R_2$ $w = w_0\cos(\omega t), \frac{\partial w}{\partial r} = 0, (w = w_0\cos(\omega t), \gamma = 0)$. Температура:

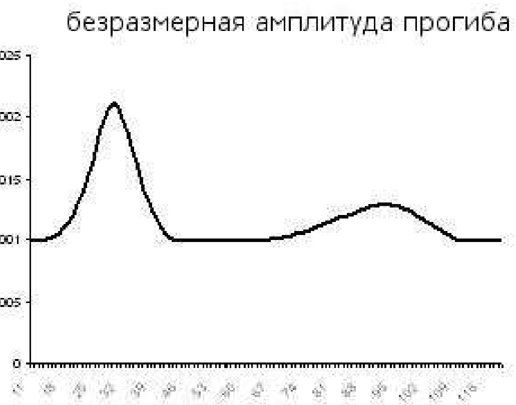
при $z = \mp\frac{h}{2}$ $\theta = 0$, при $r = R_1, r = R_2$ $\frac{\partial\theta}{\partial r} = 0$.

Численные расчеты выполнены для вязкоупругого материала [2].

Решение краевых задач для систем разрешающих уравнений (6), (8), описывающих НДС и тепловое поле, проводилось по алгоритму из [3].

Геометрические размеры пластинки следующие: $h = 0,01$м, $R_1 = 0.5$м, $R_2 = 1$м; компоненты интенсивности нагрузки – $q_1(r) = 0$, $q_2(r) \equiv 0$.

Ниже приведены графики зависимости безразмерной температуры и безразмерной амплитуды прогиба от частоты внешнего возбуждения для модели Тимошенко. Амплитуда $w_0 = 0,001$м.



Сравнительный анализ показывает:

1) при малой толщине пластинки значения, полученные в обеих моделях, практически совпадают;

2) учет зависимости свойств материала от температуры не влияет на характеристики НДС и тепловое поле.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Тимошенко С.П.* Пластинки и оболочки. М.: Гостехиздат, 1946.

2. *Карнаухов В.Г.* Связанные задачи термовязкоупругости. Киев: Наук. думка, 1982. 260 с.

3. *Барышев А.А., Мыльцина О.А., Брюшко М.И.* Вибрационный изгиб вязкоупругой оболочки с учетом связанности теплового и механического полей // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 202–204.

УДК 629

А.Г. Бирюков, В.Г. Бирюков, Ю.Н. Челноков

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ВЫВОДА ТВЕРДОГО ТЕЛА НА ЗАДАННУЮ ПРОГРАММНУЮ ТРАЕКТОРИЮ

Рассматривается задача оптимального вывода твердого тела на заданную программную траекторию углового движения. Введем в рассмотрение следующие системы координат: ξ — инерциальная, Z — опорная (программная) система координат, вращающаяся в инерциальном пространстве с заданной (программной) угловой скоростью $\bar{\omega}^0 = \bar{\omega}^0(t)$ и угловым ускорением $\bar{\varepsilon}^0 = \bar{\varepsilon}^0(t)$, X — система координат, жестко связанная с твердым телом. Движение твердого тела описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений в отклонениях [1]

$$\begin{aligned} &\delta\dot{\bar{\omega}}_\xi = \delta\bar{\varepsilon}_\xi + \left[\bar{\nu}\circ\bar{\omega}^0_\xi\circ\tilde{\bar{\nu}}\right]\times\delta\bar{\omega}_\xi, \\ &2\dot{\bar{\nu}} = \delta\bar{\omega}_\xi\circ\bar{\nu}. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\delta\bar{\omega}_\xi, \delta\bar{\varepsilon}_\xi$ — векторы ошибки по угловой скорости и углового ускорения, ν — кватернион ошибки ориентации, $\circ$ —кватернионное умножение, $\tilde{\nu}$ —сопряженный кватернион.

Требуется построить управление $\delta\bar{\varepsilon}_\xi$, переводящее твердое тело из начального состояния

$$\delta\bar{\omega}_\xi\left(0\right) = \delta\bar{\omega}^0_\xi, \ \ \bar{\nu}\left(0\right) = \bar{\nu}^0 \tag{2}$$

в конечное состояние

$$\delta\bar{\omega}_\xi\left(t_1\right) = 0, \ \ \bar{\nu}\left(t_1\right) = 1 \tag{3}$$