

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Нагар Ю.Н., Ольшанский В.Ю., Панкратов В.М., Серебряков А.В.* Об одной модели пьезогироскопа // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 2. С. 71–74.
2. *Окадзаки К.* Технология керамических диэлектриков. М.: Энергия, 1976.

УДК 539.3

Н.С. Анофрикова, Н.В. Сергеева

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В НАСЛЕДСТВЕННО-УПРУГОМ СЛОЕ: СЛУЧАЙ СИММЕТРИЧНОГО ПО НОРМАЛЬНОЙ КООРДИНАТЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

В работах [1–3] на примере упругого слоя и цилиндрической оболочки показана возможность построения дисперсионных кривых с помощью асимптотических приближенных теорий. Данная работа посвящена исследованию влияния наследственности на поведение дисперсионных кривых в случае наследственно-упругого слоя, материал которого описывается с помощью модели Работнова [4]. Будем рассматривать распространение волн в бесконечной наследственно-упругой пластине ограниченной плоскостями $z = \pm h$, в направлении оси x (рис. 1). Динамическое напряженно-деформированное состояние (НДС) пластины описывается уравнениями движения в напряжениях, записанных для случая плоской задачи, и уравнениями состояния:

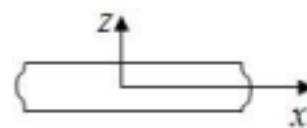


Рис. 1

$$\begin{cases} \tilde{E}\epsilon_{ii} = \sigma_{ii} - \tilde{\nu}(\sigma_{22} + \sigma_{kk}), \\ 0 = \sigma_{22} - \tilde{\nu}(\sigma_{ii} + \sigma_{jj}), \\ \tilde{E}\epsilon_{ij} = (1 + \tilde{\nu})\sigma_{ij}, \quad i \neq j \neq k = 1, 3, \end{cases} \quad (1)$$

где $\tilde{E} = E(1 - \Gamma^*)$, $\tilde{\nu} = \nu + \frac{1 - 2\nu}{2}\Gamma^*$,

$$\Gamma^* f(t) = k \int_{-\infty}^t \mathfrak{D}_{-\frac{1}{2}}(-\beta_*, t - t_*) f(t_*) dt_*, \quad (2)$$

$\mathfrak{D}_{-\frac{1}{2}}(-\beta_*, t) = t^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_*)^n t^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$, σ_{ij} , ϵ_{ij} — компоненты тензора напряжений и тензора деформаций соответственно, E , ν — мгновенные

значения модуля Юнга и коэффициента Пуассона, k , β_* — параметры материала, t — время.

При изучении собственных колебаний будем исследовать свойства тех мод, которые изменяются во времени по гармоническому закону и удовлетворяют уравнениям движения, уравнениям состояния (1), записанным в перемещениях и напряжениях, и однородным граничным условиям на лицевых поверхностях. Тогда решение для перемещений v_i будем искать в виде

$$v_i = v_i(z) \exp(i\omega t - (\alpha_* + i\chi)x), \quad (3)$$

где ω — частота, χ — волновое число, $\alpha_* > 0$ — коэффициент затухания, определяющий убывание амплитуды волны с увеличением координаты x .

С учетом (2) и (3) уравнения состояния (1) можно переписать следующим образом:

$$\begin{cases} EE^F \epsilon_{ii} = \sigma_{ii} - \nu^F (\sigma_{22} + \sigma_{kk}), \\ 0 = \sigma_{22} - \nu^F (\sigma_{ii} + \sigma_{jj}), \\ EE^F \epsilon_{ij} = (1 + \nu^F) \sigma_{ij}, \quad i \neq j \neq k = 1, 3, \end{cases} \quad (4)$$

где $E^F = 1 - \frac{k}{\beta_* + \sqrt{i\omega}}$, $\nu^F = \nu + \frac{1 - 2\nu}{2} \frac{k}{\beta_* + \sqrt{i\omega}}$.

Рассмотрим случай симметричного по нормальной координате НДС, когда перемещение v_1 и напряжения σ_{11} , σ_{33} являются четными по нормальной координате функциями, а v_3 , σ_{13} — нечетными. В этом случае приходим к следующему дисперсионному уравнению:

$$\gamma^4 \cosh(\alpha) \frac{\sinh(\beta)}{\beta} - \alpha^2 \chi_*^2 \frac{\sinh(\alpha)}{\alpha} \cosh(\beta) = 0, \quad (5)$$

где $\alpha^2 = \chi_*^2 - \kappa_F^2 \Omega^2$, $\beta^2 = \chi_*^2 - \Omega^2$, $\gamma^2 = \chi_*^2 - \frac{\Omega^2}{2}$, $i\chi_* = \alpha_* + i\chi$, $\kappa_F^2 = \frac{1 - 2\nu^F}{2 - 2\nu^F}$, $\Omega^2 = \omega_*^2 \frac{2(1 + \nu^F)}{E^F}$, $\omega_* = \frac{h}{c_2} \omega$, $c_2 = \sqrt{\frac{E}{2(1 + \nu)\rho}}$, ρ — плотность материала.

Формально уравнение (5) имеет тот же вид, что и дисперсионное уравнение для упругой полосы (см. [1]), но в отличие от последнего уравнение (5) является комплексным. Поэтому дисперсионное уравнение в случае наследственно-упругого слоя в отличие от дисперсионного уравнения упругого слоя (см. [1–3]) не имеет комплексно-сопряженных корней. Но из вида уравнения (5) следует, что если χ_* — решение дисперсионного уравнения (5), то и $-\chi_*$ также будет его решением,

следовательно, существует симметрия дисперсионных кривых при замене χ_* на $-\chi_*$.

Отсутствие комплексно-сопряженных корней ведет к нарушению симметрии частотного спектра относительно плоскостей $\chi = 0$ и $\alpha_* = 0$. Таким образом, в наследственно-упругом спектре ветви разделяются. На рис. 2, а, б, в показаны проекции на плоскость (ω_*, χ) ветвей дисперсионного спектра как с положительной, так и с отрицательной мнимой частью χ_* для случаев: а) $k_* = 0.53$, $\beta_{**} = 1$; б) $k_* = 0.53$, $\beta_{**} = 2$; в) $k_* = 0.05$, $\beta_{**} = 1$ ($k_* = \sqrt{\frac{h}{c_2}}k$, $\beta_{**} = \sqrt{\frac{h}{c_2}}\beta_*$) соответственно. Из графиков видно, что чем больше значение k_* или меньше значение β_{**} , тем раньше и больше начинают расходиться дисперсионные кривые. На рис. 2, г изображены дисперсионные кривые для упруго-подобного материала ($k_* = 0$).

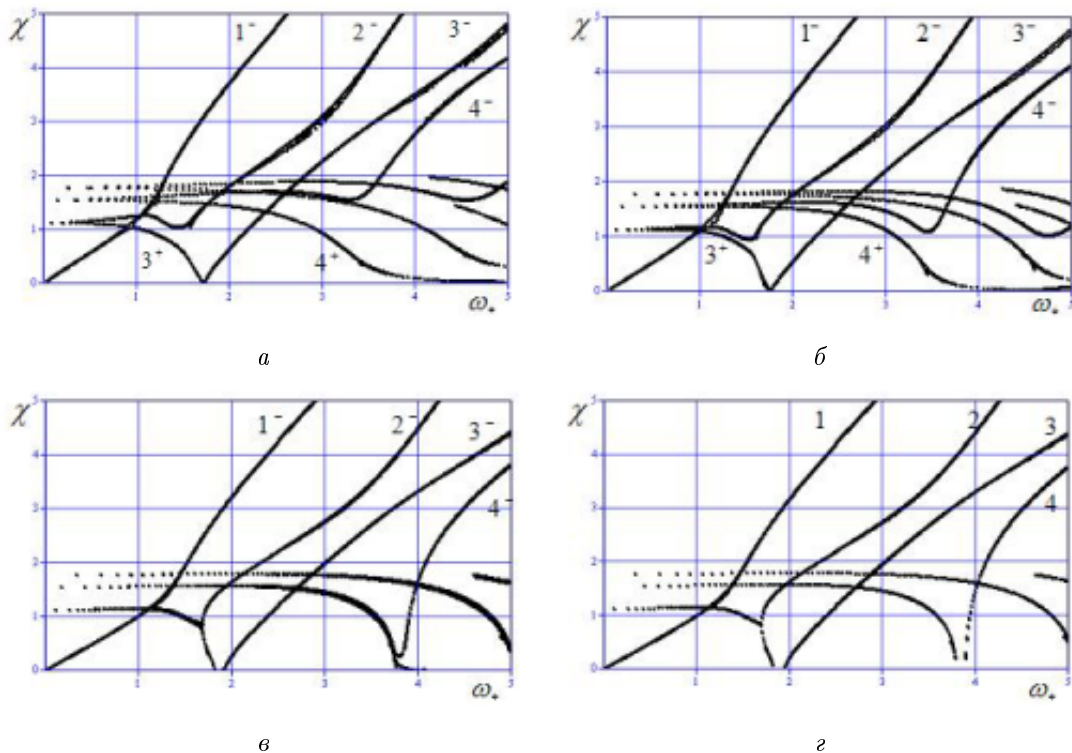


Рис. 2

Из графиков видно, что при уменьшении значений k_* или при увеличении значений β_{**} поведение дисперсионных кривых стремится к упругому случаю. Также численные расчеты показывают, что дисперсионные кривые наследственно-упругого спектра, соответствующие действительным ветвям упругого спектра, являются комплексными с отрицательной мнимой частью χ_* , что определяет затухание решения по координате. Кроме того, из графиков видно, что в окрестностях частот запирания и частотных минимумов упруго-подобного спектра ветви наследственно-упругого спектра имеют

наибольшую кривизну. Увеличение значения k_* , как и уменьшение значения β_{**} , ведет к сглаживанию дисперсионных кривых в этих областях.

Следует заметить, что для наследственно-упругого спектра теряют смысл понятия частоты запираения, так как $\chi_* = 0$, $\omega_* > 0$ не являются корнями уравнения (5) и частотного минимума, поскольку при движении вдоль ветви ω_* монотонно возрастает.

Таким образом, упруго-подобный спектр приближенно можно рассматривать как асимптотический для наследственно-упругого при $k_* \rightarrow 0$, $\beta_{**} \gg 1$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кожанова Т.В., Коссович Л.Ю. Дисперсионные уравнения Релея—Лэмба. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1990. 21 с.
2. Karlnov J.D., Kossovich L.Ju., Nolde E.V. Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies. Jan Diego: Academic Press, 1998.
3. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 284 с.
4. Работнов Ю.И. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.

УДК 539.3

Н.С. Анофрикова, Ю.В. Шевцова

НИЗКОЧАСТОТНЫЕ ДЛИННОВОЛНОВЫЕ ТАНГЕНЦИАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ВЯЗКОПРУГОСТИ ДЛЯ СЛУЧАЯ ДВУХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

В данной работе результаты асимптотических методов исследования динамических задач для тонких упругих пластин и оболочек [1–3] применяются к случаю двухслойных пластин, выполненных из вязкоупругого материала. В основу исследования положена методика непосредственного вывода асимптотических приближений из точных трехмерных уравнений [4].

Рассмотрим бесконечную двухслойную пластину, каждый слой которой выполнен из вязкоупругого материала, свойства которого описываются моделью стандартного вязкоупругого тела. В l -м слое ($l = 1, 2$) введем декартову систему координат $(x_1^{(l)}, x_2^{(l)}, z^{(l)})$, совмещая плоскость $Ox_1^{(l)}x_2^{(l)}$ со срединной плоскостью слоя и направляя ось $z^{(l)}$ по нормали к срединной плоскости. Введем обозначения: $\sigma_{ij,l}$ —