

А.И. Вельмисова

РАСПРОСТРАНЕНИЕ И ОТРАЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН В ПЛОСКОМ АКУСТИЧЕСКОМ СЛОЕ С ГИБКИМИ СТЕНКАМИ В СЛУЧАЕ РАЗРЫВА УПРУГИХ СВОЙСТВ НА ОДНОЙ ИЗ СТЕНОК

Рассматривается плоский акустический слой, ограниченный упругими мембранами, одна из которых имеет разрыв упругих свойств. Исследуется распределение энергии между отраженными и прошедшими волнами при прохождении гармонической волны через линию разрыва. Изучение распространения волн в волноводах с такими свойствами представляет интерес для моделирования гемодинамики крупных кровеносных сосудов в норме и после реконструктивной операции (рис. 1).

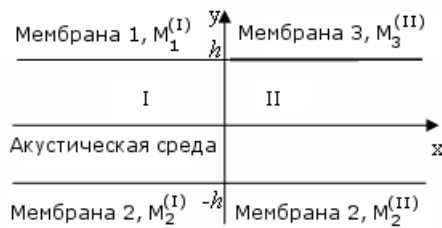


Рис. 1

Рассмотрим распространение гармонических волн в плоском акустическом слое с гибкими кусочно-однородными стенками, находящимися на расстоянии $2h$ друг от друга [1].

В безразмерных переменных уравнения движения для мембран и акустической среды записываются в виде

$$\begin{cases} (\varepsilon_i^{(j)})^2 \frac{\partial^2 w_i^{(j)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 w_i^{(j)}}{\partial \tau^2} + \kappa_i^{(j)} q_i^{(j)} = 0, \\ \frac{\partial^2 p^{(j)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 p^{(j)}}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 p^{(j)}}{\partial \tau^2} = 0, \quad (i = 1, 2, 3; j = I, II), \\ \frac{\partial^2 v^{(j)}}{\partial \tau^2} = -\frac{\partial^2 p^{(j)}}{\partial \zeta}, \end{cases} \quad (1)$$

где безразмерные переменные вводятся по формулам $\xi = \frac{x}{h}$, $\zeta = \frac{y}{h}$, $\tau = \frac{c_0 t}{h}$, $w_i^{(j)} = h w_i^{*(j)}$, $v^{(j)} = h v^{*(j)}$, $p^{(j)} = c_0^2 \rho_0 p^{*(j)}$ (при этом звездочки в дальнейшем опускаем). В системе (1) индексом i ($i = 1, 2, 3$) обозначены величины, принадлежащие соответственно первой, второй и третьей мембране, индексом j ($j = I, II$) — акустические среды; $w_i^{(j)}$ — смещение i -й мембраны в j -й акустической среде, $c_i^{(j)}$ — скорость распространения упругой волны в i -й мембране, $c_i^{(j)} = \sqrt{\frac{F_i}{\tilde{\rho}_i^{(j)}}}$, где F_i — силы натяжения i -й мембраны, $\tilde{\rho}_i^{(j)} = \rho_i^{(j)} h_i^{(j)}$, $h_i^{(j)}$ — толщина i -й мембраны, $\rho_i^{(j)}$ — плотность материала i -й мембраны; $q_i^{(j)}$ — давление, оказываемое j -й акустической средой на i -ю мембрану, c_0 — скорость распространения

звука в акустической среде, ρ_0 — плотность акустической среды, x и y — продольная и поперечная координаты, $v^{(j)}$ — смещение j -й среды, $p^{(j)}$ — акустическое давление I и II акустических сред, $\varepsilon_i^{(j)} = \frac{c_i^{(j)}}{c_0}$, $\varepsilon_i^{(j)} \ll 1$, $\kappa_i^{(j)} = \frac{h\rho_0}{h_i^{(j)}\rho_i^{(j)}}$, ($i = 1, 2, 3$; $j = I, II$).

На верхней и нижней мембранах должны быть выполнены следующие условия:

$$M_1^{(I)} : q_1^{(I)} = p^{(I)}, M_3^{(II)} : q_3^{(II)} = p^{(II)}, M_2^{(I)} : q_2^{(I)} = -p^{(I)}, M_2^{(II)} : q_2^{(II)} = -p^{(II)}. \quad (2)$$

Граничные условия при $y = \pm h$ ($\zeta = \pm 1$) выглядят так же, как и в [1]. Граничные условия на стыке $\xi = 0$ запишутся следующим образом:

$$v^{(I)} = v^{(II)}, \frac{\partial v^{(I)}}{\partial \xi} = \frac{\partial v^{(II)}}{\partial \xi}, w_1^{(I)} = w_3^{(II)}, w_2^{(I)} = w_2^{(II)}, \frac{\partial w_1^{(I)}}{\partial \xi} = \frac{\partial w_3^{(II)}}{\partial \xi}, \frac{\partial w_2^{(I)}}{\partial \xi} = \frac{\partial w_2^{(II)}}{\partial \xi}. \quad (3)$$

Рассмотрим распространение гармонической волны с заданной частотой ω и волновыми числами $\chi^{(j)}$, $j = I, II$. Дисперсионное уравнение для волноводов рассматриваемого типа получено в [1]. Решения для элементарных волн записываются в виде

$$p_r^{(j)} = P_r^{(j)}(\zeta)e^{i(\omega\tau - \chi^{(j)}\xi)}, \quad p_l^{(j)} = P_l^{(j)}(\zeta)e^{i(\omega\tau + \chi^{(j)}\xi)}, \quad (4)$$

где ω — частота и $\chi^{(j)}$ — волновое число, собственные функции $P_r^{(j)}(\zeta)$ и $P_l^{(j)}(\zeta)$ были получены в [2].

Решение для падающей ($p_r^{(I)}$), отраженной ($p_l^{(I)}$) и прошедшей ($p_r^{(II)}$) волн должны удовлетворять граничным условиям для функции давления $p^{(j)}$ ($j = I, II$) на стыке $\xi = 0$:

$$p_r^{(II)} = p_r^{(I)} + p_l^{(I)}, \quad \frac{\partial p_r^{(II)}}{\partial \xi} = \frac{\partial p_r^{(I)}}{\partial \xi} + \frac{\partial p_l^{(I)}}{\partial \xi}. \quad (5)$$

Пусть на стык падает мода номер l_0 . Тогда выражение для падающей волны имеет вид

$$p_r^{(I)} = q_0 P_{l_0}^{(I)} e^{i(\omega\tau - \chi_{l_0}^{(I)}\xi)}, \quad (6)$$

где q_0 — некоторая постоянная. Решение для отраженной волны представим в виде линейной комбинации

$$p_l^{(I)} = \sum_{m=1}^{\infty} A_m P_m^{(I)}(\zeta) e^{i(\omega\tau + \chi_m^{(I)}\xi)}. \quad (7)$$

Решение для прошедшей волны представим в виде

$$p_r^{(II)} = \sum_{m=1}^{\infty} B_m P_m^{(II)}(\zeta) e^{i(\omega\tau - \chi_m^{(II)}\xi)}. \quad (8)$$

В (7), (8) A_m, B_m — некоторые постоянные, требующие определения.

Введем скалярное произведение:

$$\langle f_1(\zeta), f_2(\zeta) \rangle_{I,II} = \int_{-1}^1 f_1 f_2 d\zeta + f_1'(1) f_2'(1) \frac{(\varepsilon_{1,3}^{(I,II)})^2}{k_{1,3}^{(I,II)} \omega^2} + f_1'(-1) f_2'(-1) \frac{(\varepsilon_2^{(I,II)})^2}{k_2^{(I,II)} \omega^2}. \quad (9)$$

Подставим решения (6), (7) и (8) в граничные условия на стыке (5). Используя соотношение ортогональности [2], получим систему для определения постоянных A_m и B_m :

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m \gamma_{mn} (\chi_n^{(II)} + \chi_m^{(I)}) = q_0 \gamma_{l_0 n} (\chi_{l_0}^{(II)} - \chi_n^{(I)}), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (10)$$

$$B_n = \frac{q_0 \gamma_{l_0 n}}{\delta_{nn}} + \frac{1}{\delta_{nn}} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \gamma_{mn}, \quad (11)$$

где $\gamma_{mn} = \langle P_m^{(I)}, P_n^{(II)} \rangle_{II}$, $\delta_{nn} = \langle P_n^{(II)}, P_n^{(II)} \rangle_{II}$.

После определения коэффициентов A_m и B_m можно сосчитать величины среднего за период потока энергии, проходящей через поперечное сечение волновода.

Для падающей, отраженной и прошедшей волн запишутся следующим образом:

$$R_{\text{пад}} = \frac{h\rho_0 c_0^3 \chi_{l_0}^{(I)}}{2\omega} \langle P_{l_0}^{(I)}(\zeta), \bar{P}_{l_0}^{(I)}(\zeta) \rangle_I,$$

$$R_{\text{отраж}} = \frac{h\rho_0 c_0^3}{2\omega} \sum_{n=1}^{M_0^{(I)}} \chi_n^{(I)} |A_n|^2 \langle P_n^{(I)}(\zeta), \bar{P}_n^{(I)}(\zeta) \rangle_I,$$

$$R_{\text{прош}} = \frac{h\rho_0 c_0^3}{2\omega} \sum_{n=1}^{M_0^{(I)}} \chi_n^{(II)} |B_n|^2 \langle P_n^{(II)}(\zeta), \bar{P}_n^{(II)}(\zeta) \rangle_I, \quad (12)$$

где $M_0^{(j)}$ — число распространяющихся волн в j -й среде на заданной частоте.

Из закона сохранения энергии имеем $R_{\text{пад}} = R_{\text{отраж}} + R_{\text{прош}}$.

На рис. 2–5 представлены графики зависимости от частоты отношения энергии отраженной (R_2) и прошедшей (R_3) волн к энергии

падающей волны ($R1$). В расчетах приняты следующие параметры задачи: $\kappa_1^{(I)} = 2, \kappa_2^{(I,II)} = 4, \kappa_3^{(II)} = 1, \varepsilon_1^{(I)} = 0.1, \varepsilon_2^{(I,II)} = 0.2, \varepsilon_3^{(II)} = 0.1/\sqrt{2}$.

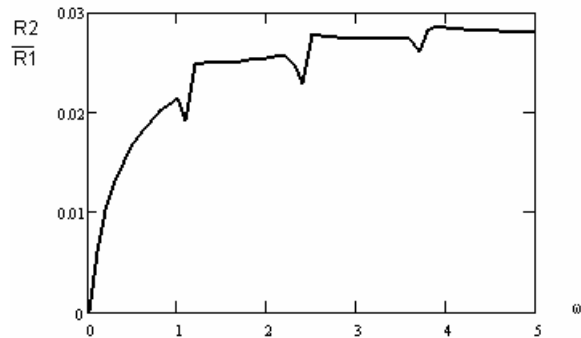


Рис. 2

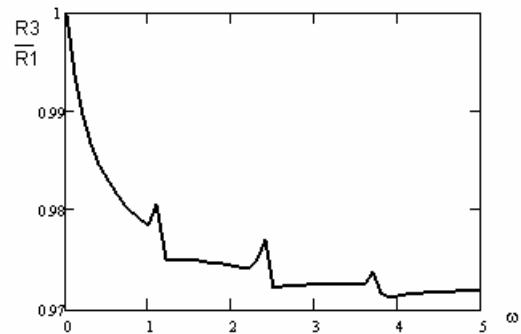


Рис. 3

На рис. 2 и 3 в качестве падающей волны принимается вторая фундаментальная мода. Как видно из графиков, с ростом частоты доля энергии отраженной волны растет, а доля энергии прошедшей волны падает. Пики на графиках соответствуют частотам запираания волн высшего порядка.

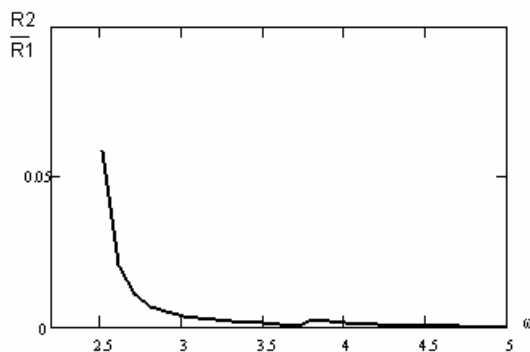


Рис. 4

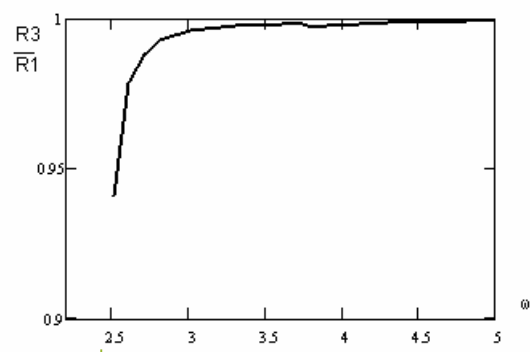


Рис. 5

На рис. 4 и 5 в качестве падающей волны принимается четвертая мода высшего порядка. В данном случае энергия отраженной волны приближается к нулю, и падающая волна практически полностью переходит в прошедшую.

Принятые параметры задачи соответствуют изменению толщины мембраны в два раза при переходе от мембраны 1 к мембране 3. Приведенные результаты и результаты вычислений для других мод показывают, что при таком соотношении параметров разрыв упругих свойств на одной из стенок оказывает незначительное влияние на распространение гармонической волны.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Постнова Ю.А.* Дисперсия волн в плоском акустическом слое с упругими стенками с различными геометрическими и материальными свойствами // *Механика деформируемых сред.* Саратов, 2004. Вып. 15. С. 95–101.

А.А. Барышев, Е.А. Номеровская

АНАЛИЗ НДС И ТЕПЛОВОГО ПОЛЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНКИ

Постановка задачи и основные соотношения

В статье рассматривается изотропная кольцевая пластинка малой толщины h , внутренний радиус которой R_1 , внешний – R_2 , изготовленная из вязкоупругого материала, свойства которого зависят от температуры. На срединной плоскости введена цилиндрическая система координат. Считаем, что пластинка испытывает малые деформации под действием распределенной по плоскости $z = -h/2$ поперечной нагрузки с частотой ω

$$q(r, t) = q_1(r) \cos(\omega t) + q_2(r) \sin(\omega t). \quad (1)$$

Предположим, что компоненты тензоров напряжения и деформаций связаны линейным законом вязкоупругости:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{1 - \nu^2} \int_{-\infty}^t K(t - \tau, \Theta, \omega) (\epsilon_r(\tau) + \nu \epsilon_\phi(\tau)) d\tau, \\ \sigma_\phi &= \frac{1}{1 - \nu^2} \int_{-\infty}^t K(t - \tau, \Theta, \omega) (\nu \epsilon_r(\tau) + \epsilon_\phi(\tau)) d\tau, \\ \tau_{rz} &= \frac{1}{2(1 + \nu)} \int_{-\infty}^t K(t - \tau, \Theta, \omega) \gamma_{rz}(\tau) d\tau, \nu = \text{const}, \end{aligned} \quad (2)$$

где ν — коэффициент Пуассона, t — время, $\Theta = \Theta(r, z)$ — неизвестная безразмерная установившаяся температура саморазогрева, $\epsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}$, $\epsilon_\phi = \frac{u_r}{r}$, $\gamma_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}$ — компоненты тензора малых деформаций, u_r, u_z — компоненты вектора перемещений.

Уравнения движения малого элемента пластинки будут следующими:

$$\frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{M_r + M_\phi}{r} = N_r, \quad \frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{N_r}{r} = \rho h \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - q(r, t). \quad (3)$$

Здесь M_r — изгибающий момент, N_r — перерезывающая сила, ρ — плотность материала пластинки.

Решение будем проводить на основе метода гипотез.