УДК 517.984

Н.П. Бондаренко

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

Рассмотрим краевую задачу $L(Q(x), h, H)$ для матричного уравнения Штурма — Лиувилля:

$$lY := -Y'' + Q(x)Y = \lambda Y, \quad x \in (0, \pi), \tag{1}$$

$$U(Y) := Y'(0) - hY(0) = 0, \quad V(Y) := Y'(\pi) + HY(\pi) = 0.$$

Здесь $Y = [y_k]_{k=\overline{1,m}}$ — вектор-столбец, λ — спектральный параметр и $Q(x) = [Q_{jk}(x)]_{j,k=\overline{1,m}}$, причем $Q_{jk}(x) \in L_2(0, \pi)$ — комплекснозначные функции. Матрицу $Q(x)$ в дальнейшем будем называть *потенциалом.* Краевые условия задаются матрицами $h = [h_{jk}]_{j,k=\overline{1,m}}$, $H = [H_{jk}]_{j,k=\overline{1,m}}$, где h_{jk} и H_{jk} — комплексные числа.

Изучается обратная спектральная задача восстановления потенциала и коэффициентов краевых условий по спектральным данным, которая представляет собой обобщение известной обратной задачи в скалярном случае, при $m = 1$ [1]. В работах [2, 3] доказана единственность решения обратной задачи для матричного уравнения Штурма — Лиувилля и получена конструктивная процедура восстановления. Результатом данной статьи являются необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи в самосопряженном случае, то есть при $Q(x) = Q^*(x)$, $h = h^*$, $H = H^*$. Отметим, что ранее необходимые и достаточные условия были получены в статье [4] для случая с существенным ограничением, заключающемся в асимптотической простоте спектра, которое не требуется в данной статье.

Основным методом исследования является метод спектральных отображений [1].

Пусть $\varphi(x, \lambda) = [\varphi_{jk}(x, \lambda)]_{j,k=\overline{1,m}}$ является решением уравнения (1) при начальных условиях $\varphi(0, \lambda) = I_m$, $\varphi'(0, \lambda) = h$, где I_m — единичная матрица $m \times m$. Функция $\Delta(\lambda) := \det[V(\varphi)]$ называется *характеристической функцией* краевой задачи L. Она является целой по λ и имеет не более чем счетное множество нулей, причем все нули вещественные. Нули характеристической функции совпадают с собственными значениями краевой задачи L с учетом кратностей.

Пусть $\omega = h + H + \frac{1}{2}\int_0^\pi Q(x)\,dx$. Без ограничения общности будем считать, что $\omega = \mathrm{diag}\{\omega_1, \dots, \omega_m\}$. Выполнения этого условия можно добиться применением унитарного преобразования, приводящего самосопряженную матрицу ω к диагональному виду. Тогда справедлива

Лемма 1. *Краевая задача L имеет счетное множество собственных значений $\Lambda = \{\lambda_{nq}\}_{n\ge 0, q=\overline{1,m}}$. При этом*

$$\rho_{nq} = \sqrt{\lambda_{nq}} = n + \frac{\omega_q}{\pi n} + \frac{\varkappa_{nq}}{n}, \quad \{\varkappa_{nq}\}_{n\ge 0} \in l_2,\ q = \overline{1,m}. \tag{2}$$

Пусть $\Phi(x,\lambda) = [\Phi_{jk}(x,\lambda)]_{j,k=\overline{1,m}}$ — решение уравнения (1) при условиях $U(\Phi) = I_m$, $V(\Phi) = 0_m$ (0_m — нулевая матрица $m \times m$). Положим $M(\lambda) := \Phi(0,\lambda)$. Матрица $M(\lambda) = [M_{jk}(\lambda)]_{j,k=\overline{1,m}}$ называется *матрицей Вейля* задачи L. Матрица-функция $M(\lambda)$ мероморфна по λ и имеет простые полюса в точкых $\{\lambda_{nq}\}$.

Положим
$$\alpha_{nq} := \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{nq}} M(\lambda).$$

Величины $\Lambda^0 := \{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}_{n\ge 0,\, q=\overline{1,m}}$ называются *спектральными данными* задачи L.

Считаем, что $\lambda_{nq} = \lambda_{kl}$ может выполняться только при $n = k$, когда $\{\lambda_{nq_{nj}}\}_{j=\overline{1,r_n}}$, где $1 \le q_{n1} < q_{n2} < \dots < q_{nr_n} \le m$, $r_n \le m$, — все различные собственные значения из $\{\lambda_{nq}\}_{q=\overline{1,m}}$. Обозначим

$$\alpha'_{nq_{nj}} := \alpha_{nq_{nj}},\ j = \overline{1,r_n}, \quad \alpha'_{nq} = 0_m,\ 1 \le q \le m,\ q \notin \{q_{nj}\}_{j=\overline{1,r_n}}.$$

Пусть $\{\omega_{m_s}\}_{s=\overline{1,p}}$ — все различные числа из набора $\{\omega_q\}_{q=\overline{1,m}}$. Введем обозначение $\alpha_n^{(s)} = \sum\limits_{\omega_q=\omega_{m_s}} \alpha'_{nq}$, $s = \overline{1,p}$.

Лемма 2. *Справедливо соотношение*

$$\alpha_n^{(s)} = \frac{2}{\pi} I^{(s)} + \frac{\varkappa_n^{(s)}}{n}, \quad \{\varkappa_n^{(s)}\}_{n\ge 0} \in l_2,\ s = \overline{1,p}, \tag{3}$$

где

$$I^{(s)} = [I_{jk}^{(s)}]_{j,k=\overline{1,m}}, \quad I_{jk}^{(s)} = \begin{cases} 1, & j = k,\ \omega_j = \omega_{m_s}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Рассмотрим следующую обратную задачу.

Задача 1. *По заданным спектральным данным* Λ^0 *построить* Q, h *и* H.

Сформулируем необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи 1.

Теорема 1. *Для того чтобы величины* $\{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}_{n\geq 0, q=\overline{1,m}}$ *были спектральными данными самосопряженной краевой задачи* $L(Q,h,H)$ *с потенциалом* $Q(x) = [Q_{jk}(x)]_{j,k=\overline{1,m}}$, $Q_{jk}(x) \in L_2(0,\pi)$ *и такой, что* $h + H + \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi Q(x)\,dx$ *является диагональной матрицей, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) $\lambda_{nq} \neq \lambda_{kl}$ *при* $n \neq k$. *Если* $\lambda_{nq} = \lambda_{nl}$, *то* $\alpha_{nq} = \alpha_{nl}$;

2) верны асимптотические формулы (2) и (3);

3) все λ_{nq} *вещественные. Ранги матриц* α_{nq} *равны кратностям* λ_{nq} *и* $\alpha_{nq} = (\alpha_{nq})^*$, $\alpha_{nq} \geq 0$ *при всех* $n \geq 0$, $q = \overline{1,m}$;

4) для любого вектора-строки $\gamma(\lambda)$, *который является целой функцией и имеет асимптотику* $\gamma(\lambda) = O(\exp(|Im\sqrt{\lambda}|\pi))$ *при* $|\lambda| \to \infty$, *из выполнения условия* $\gamma(\lambda_{nq})\alpha_{nq} = 0$ *при всех* $n \geq 0$, $q = \overline{1,m}$ *следует, что* $\gamma(\lambda) \equiv 0$.

Данная теорема является обобщением известного результата для скалярного случая (см. [1, с. 72]). Однако отметим, что в матричном случае вводится дополнительное условие 4. Нетрудно показать, что в скалярном случае оно вытекает из условий 1 — 3.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Юрко В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.

2. *Yurko V.A.* Inverse problems for matrix Sturm — Liouville operators // Russian J. of Mathematical Physics. 2006. Vol. 13, №1. P. 111–118.

3. *Yurko V.A.* Inverse problems for the matrix Sturm — Liouville equation on a finite interval // Inverse Problems. 2006. Vol. 22. P. 1139–1149.

4. *Chelkak D., Korotyaev E.* Weyl-Titchmarsh functions of vector-valued Sturm — Liouville operators on the unit interval // J. of Functional Analysis. 2009. Vol. 257, iss. 5. P. 1546–1588.

УДК 519.4

Д.А. Бредихин

О ПОЛУГРУППАХ ОТНОШЕНИЙ С УНАРНЫМИ ОПЕРАЦИЯМИ

Множество бинарных отношений Φ, замкнутое относительно некоторой совокупности Ω операций над ними, образует алгебру (Φ, Ω), называемую *алгеброй отношений*. Всякая такая алгебра может быть рассмотрена