

Э.В. Антоненко, С.Ю. Аляев

**ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ
ТОНКОСТЕННОГО ЦИЛИНДРА
НА ОСЕВЫЕ КРИТИЧЕСКИЕ УСИЛИЯ**

Проблеме устойчивости цилиндрических оболочек при осевом сжатии посвящены сотни публикаций [1, 2]. В их абсолютном большинстве случаев рассматривались гладкие оболочки постоянной толщины и подкреплённые оболочки. Единицы работ связаны с расчетом оболочек переменной толщины (с геометрической неоднородностью).

Ниже предлагаются результаты численного эксперимента по влиянию закона изменения толщины оболочки вдоль образующей $\delta(x)$ на величину погонных критических усилий при осесимметричной форме потери устойчивости. Вместо традиционно используемых для однородных оболочек осевых критических напряжений здесь берутся $N_* = \sigma(x)\delta(x)$. Исследования проводились с использованием прямого метода [3], построенного на законе сохранения энергии, из условия безразличного равновесия при потере устойчивости. Этот метод даёт [1]

$$N_* = \frac{\bar{E} \int_0^l \delta^3(x) [w''(x)]^2 dx + ER^{-2} \int_0^l \delta(x) w^2(x) dx}{\int_0^l [w'(x)]^2 dx} \quad (1)$$

где обозначения общепринятые: $\bar{E} = E/[12(1-\mu^2)]$, $w(x)$ – функция прогиба, зависящая от граничных условий. При шарнирном закреплении и защемлении краев оболочки принимались функции

$$w_{\text{ш}}(x) = A \sin(m\pi x/l); \quad w_{\text{з}}(x) = A \sin(m\pi x/l).$$

Закон изменения толщины оболочки представляется в виде $\delta(x) = \delta_0 \phi(x)$, где δ_0 – толщина оболочки в сечении $x = 0$. Вид функций $\phi(x)$ приведен в таблице. При $\phi(x) = 1$ имеем однородную оболочку толщиной δ_0 .

Результаты расчетов по формуле (1) для некоторых неоднородных оболочек удалось представить в виде

$$N_* = N_{*0}\alpha, \quad N_{*0} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \frac{\delta_0^2}{R}, \quad (2)$$

где N_{*0} – осевые критические усилия шарнирно опертой одномерной однородной оболочки толщиной δ_0 , α – корректирующие функции, учитывающие закон изменения толщины оболочки. Для оболочек с защемлёнными краями $N_{*0з} = \sqrt{3}N_{*0}$.

Введем удельные критические усилия, приходящиеся на единицу массы оболочки m :

$$\bar{N}_* = \frac{N_{*0}}{m}, \quad m = 2\pi R\rho \int_0^l \delta(x)dx. \quad (3)$$

Будем сравнивать удельные критические усилия неоднородной и однородной оболочек одинаковой массы при одинаковых габаритах R и l . Для такой неоднородной оболочки, эквивалентной однородной по массе, получим

$$m = m_\delta = 2\pi R\rho\delta_\delta; \quad \delta_\delta = \delta_0\beta; \quad \beta = \int_0^l \phi(x)dx, \quad (4)$$

где δ_δ – толщина однородной оболочки с осевыми критическими усилиями $N_{*\delta} = N_{*0}$ (2), где $\delta_\delta = \delta_0$.

Эффективность оболочек будем оценивать показателем

$$\eta = \frac{N_*}{N_{*0}} = \frac{\alpha}{\beta^2} = \sqrt{\Phi_1\Phi_2}. \quad (5)$$

Корректирующие функции α , формирующие осевые критические усилия неоднородных оболочек, и эффективность оболочек η определялись для ряда законов изменения толщины оболочек (таблица). Результаты вычислительного эксперимента отражены на рис.1 – 4.

Законы изменения толщины 1-2 соответствуют составной оболочке, состоящей из двух и трех участков (рис. 1, 2). Для оболочки, состоящей из трех участков на рис. 2, диапазон для $\bar{l} = 0 \div 1$ следует заменить на диапазон $\bar{l} = 0 \div 0.5$.

Пятый закон линейного изменения толщины, обозначенный на рис. 3, 4 $\delta(x) = \text{lin}(a, x)$, потребовал для получения обозримых результатов замены линейной функции отрезком ряда степеней синусов с использованием интерполяционного многочлена Лагранжа пятой степени.

Шестой закон изменения толщины, обозначенный на рис. 3, 4 $\delta(x) = \text{opt}_5(a, x)$, получен численным поиском максимума многочлена синусов 5-й степени при ограничениях, соответствующих физическому смыслу задачи.

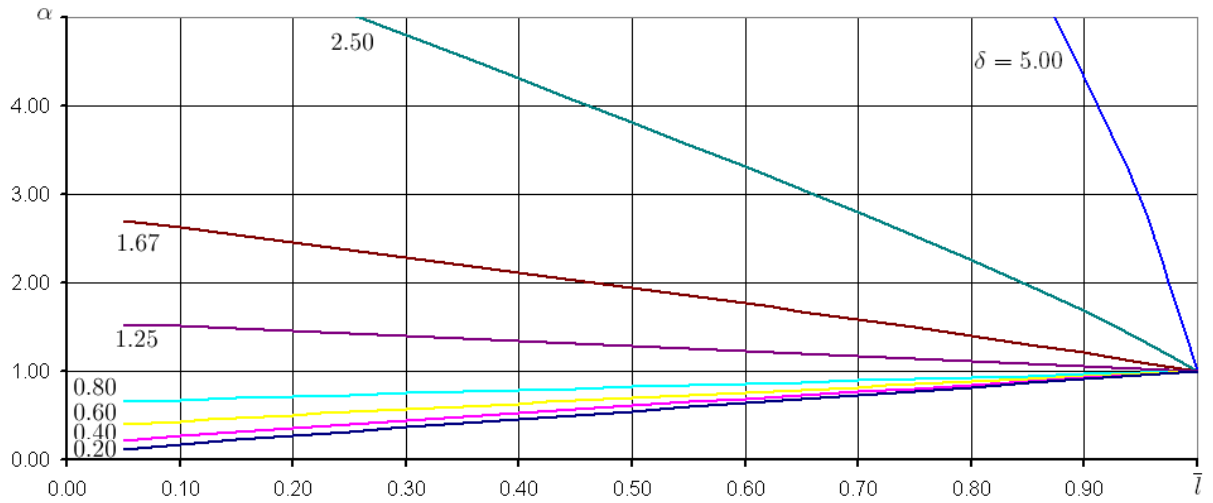


Рис. 1

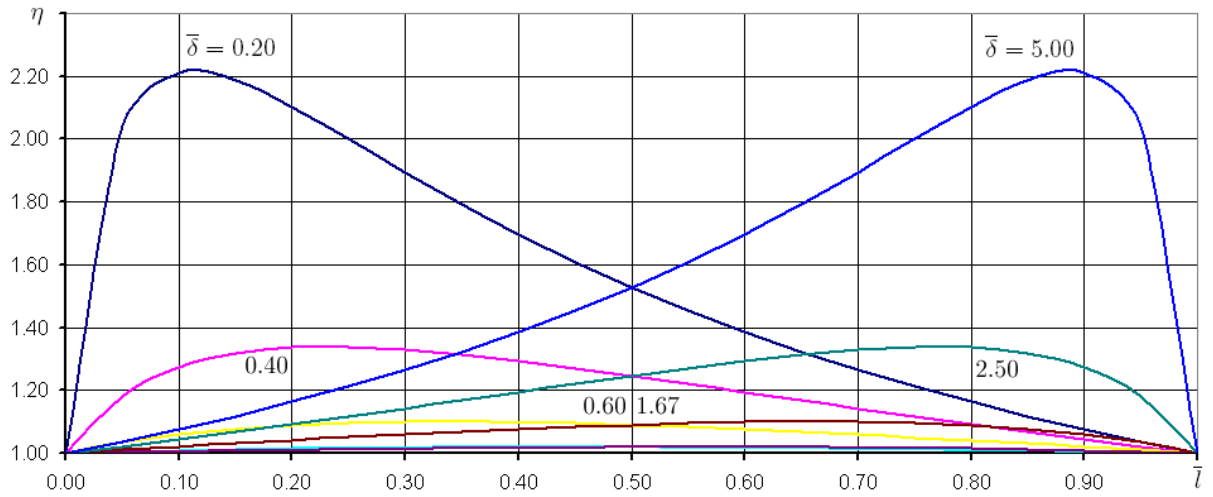


Рис. 2

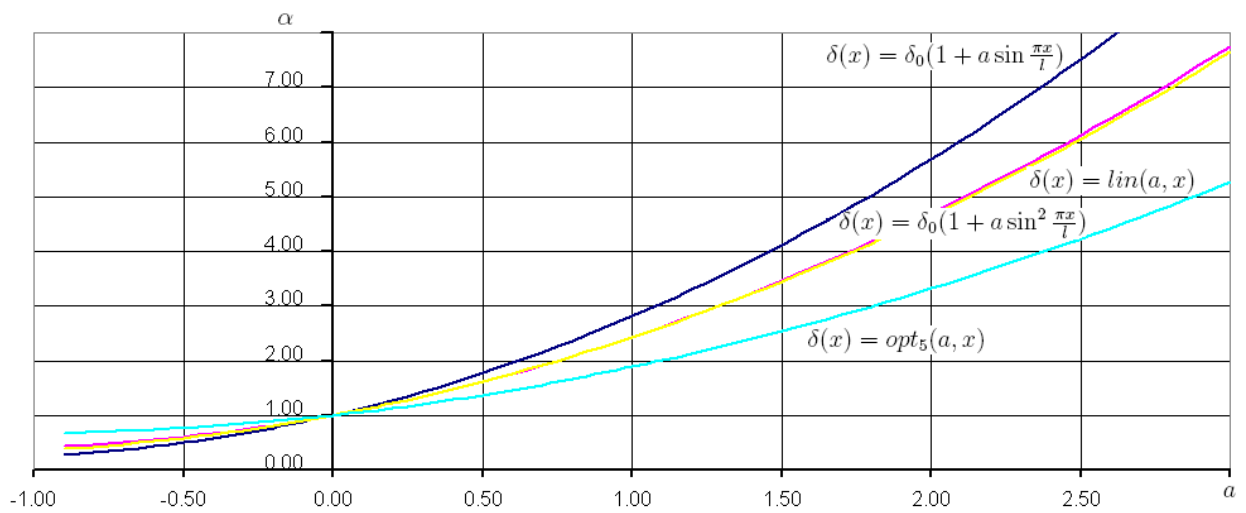


Рис. 3

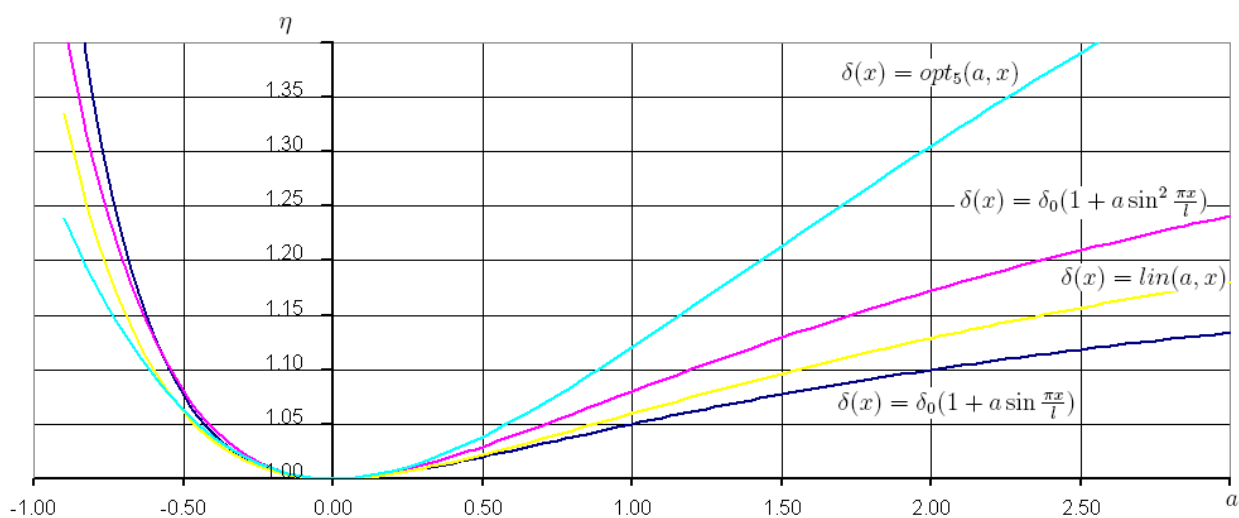


Рис. 4

Таблица

№	$\phi(x)$	$\beta = \delta/\delta_0$	$\Phi_1; \Phi_2$
1	$1, \quad 0 \leq x \leq l_1;$ $\bar{\delta}, \quad l_1 < x \leq l.$	$\bar{l} + (1 - \bar{l})\bar{\delta}$	$\Phi_1 = \bar{l}(1 - \bar{\delta}^3) + \bar{\delta}^3,$ $\Phi_2 = \bar{l}(1 - \bar{\delta}) + \bar{\delta}$
2	$1, \quad 0 \leq x \leq l_1;$ $\bar{\delta}, \quad l_1 < x \leq l - l_1;$ $1, \quad l - l_1 < x \leq l.$	$2\bar{l}(1 - \bar{\delta}) + \bar{\delta}$	$\Phi_1 = 2\bar{l}(1 - \bar{\delta}^3) + \bar{\delta}^3,$ $\Phi_2 = 2\bar{l}(1 - \bar{\delta}) + \bar{\delta}$
3	$1 + a \sin(\pi x/l)$	$1 + 2a/\pi$	$\Phi_1 = 1 + (6a)/\pi + (3a^2)/2 + (4a^3)/\pi,$ $\Phi_2 = 1 + (2a)/\pi$
4	$1 + a \sin(\pi x)/l$	$1 + a/2$	$\Phi_1 = 1 + (3a)/2 + (9a^2)/8 + (5a^3)/16,$ $\Phi_2 = 1 + a/2$
5	$1 + (2ax)/l, \quad 0 \leq x \leq l/2;$ $1 + 2a(1 - x/l), \quad l/2 \leq x \leq l.$	$1 + 0.515a$	$\Phi_1 \approx 1 + 1.546a + 1.077a^2 + 0.284a^3,$ $\Phi_2 \approx 1 + 0.515a$
6	$1 - 0.493a \sin^3 \pi x/l +$ $+ 1.493a \sin^5 \pi x/l$	$1 + 0.298a$	$\Phi_1 \approx 1 + 0.893a + 0.666a^2 + 0.184a^3,$ $\Phi_2 \approx 1 + 0.298a$

$$\delta_0 = \delta_1, \quad \bar{\delta} = \delta_2/\delta_1, \quad \bar{l} = l_1/l.$$

Из представленных результатов следует вывод о выгодности применения неоднородных оболочек.

Замечание. Результаты получены прямым энергетическим методом расчета устойчивости с использованием правил приближенного анализа и не претендуют на высокую точность. Они могут быть полезными на этапе эскизного проектирования оболочечных конструкций.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1974. 640 с.
2. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек. М.: Наука, 1995, 308 с.
3. Канн С.Н. Строительная механика оболочек. М.: Машиностроение, 1966, 508 с.
4. Антоненко Э.В., Хлопцева Н.С. Осесимметричная форма потери устойчивости тонкостенных цилиндров переменной толщины // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов ун-та, 2006. Вып. 8. С.165-167.