УДК 629

В.Г. Бирюков, А.Г. Бирюков

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ОРИЕНТИРОВАННОГО УГЛОВОГО ПОЛОЖЕНИЯ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рассматривается задача оптимальной стабилизации ориентированного угового положения твердого тела, обладающего сферической симметрией. С помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина построено оптимальное управление в виде функции фазовых координат, содержащее две неизвестные скалярные величины.

1. Постановка задачи. Угловое движение сферически симметричного твердого тела описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений [1]

$$\begin{cases} \dot{\bar{\omega}} = \bar{u}, \\ 2\dot{\bar{\lambda}} = \bar{\lambda} \circ \bar{\omega}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\bar{u} = \dfrac{\bar{M}}{J}$, $\bar{M}$ — момент внешних сил, J — осевой момент инерции твердого тела, $\bar{\omega}$ — абсолютная угловая скорость, $\bar{\lambda}$ — кватернион ориентации твердого тела.

Требуется построить управление $\bar{u}$, переводящее твердое тело, движение которого описывается уравнениями (1), асимптотически устойчивым образом из заданого начального состояния

$$\bar{\lambda}(0) = \bar{\lambda}^0, \bar{\omega}(0) = \bar{\omega}^0 \tag{2}$$

в конечное состояние

$$\bar{\lambda} = 1, \bar{\omega} = 0 \tag{3}$$

и при этом должен принимать наименьшее значение функционал качества переходного процесса

$$I = \int\limits_0^\infty \left(\alpha_1|\bar{\lambda}_v|^2 + \alpha_2|\bar{\omega}|^2 + \alpha_3|\bar{u}|^2\right),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = \text{const} > 0$ — весовые коэффициенты, $\bar{\lambda}_v$ — векторная часть кватерниона $\bar{\lambda}$.

Будем считать, что на управляющее воздействие $\bar{u}$ не наложены никакие ограничения.

2. Метод решения задачи. Поставленная задача решалась с помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина. Составлялась функция Гамильтона – Понтрягина и система дифференциальных уравнений для сопряженных переменных. Из условия максимума функции Гамильтона-Понтрягина был найден закон оптимального управления в виде функции сопряженных переменных:

$$\bar{u}^{opt} = \frac{\bar{\varphi}}{2\alpha_3}, \tag{4}$$

где $\bar{\varphi}$ — векторная сопряженная переменная, соответсвующая угловой скорости твердого тела $\bar{\omega}$.

В результате задача была сведена к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений углового движения твердого тела (1), замкнутой законом оптимального управления (4) и дополненной системой дифференциальных уравнений для сопряженных переменных

$$\begin{cases} \dot{\bar{\omega}} = \dfrac{\bar{\varphi}}{2\alpha_3}, \\ 2\dot{\bar{\lambda}} = \bar{\lambda} \circ \bar{\omega}, \\ \dot{\bar{\varphi}} = 2\alpha_2 \bar{\omega} - \bar{p}, \\ \dot{\bar{p}} = \bar{p} \times \bar{\omega} + 2\alpha_1 \lambda_0 \bar{\lambda}_v, \end{cases} \tag{5}$$

где $\bar{p} = vect(\tilde{\bar{\lambda}} \circ \bar{\psi})$, $\bar{\psi}$ — кватернионная сопряженная переменная, соответсвующая кватерниону ориентации твердого тела $\bar{\lambda}$, λ_0 — скалярная часть кватерниона $\bar{\lambda}$, волна означает сопряженный кватернион.

Были найдены первые интегралы системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5):

$$\alpha_2 |\bar{\omega}|^2 - \frac{1}{4\alpha_3} |\bar{\varphi}|^2 - \bar{\omega} \cdot \bar{p} - 2\alpha_1 \lambda_0^2 = C, \tag{6}$$

$$\bar{\omega} \times \bar{\varphi} - \bar{p} + \tilde{\bar{\lambda}} \circ \bar{p} \circ \bar{\lambda} = \bar{D}. \tag{7}$$

Следует отметить, что выражение (6) представляет собой скалярный первый интеграл системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5), а соотношение (7) — векторный первый интеграл системы (5).

Векторная постоянная $\bar{D}$, входящая в первый интеграл (7) определяется из конечного состояния твердго тела (3): $\bar{D} = 0$. С учетом этого первый интеграл (7) принимает вид

$$\bar{\omega} \times \bar{\varphi} - \bar{p} + \tilde{\bar{\lambda}} \circ \bar{p} \circ \bar{\lambda} = 0. \tag{8}$$

Рассмотрим подробнее первый интеграл (8). Так как слагаемое $\tilde{\bar{\lambda}} \circ \bar{p} \circ \bar{\lambda}$ представляет собой операцию вращения вектора $\bar{p}$ по конусу вокруг векторной части $\bar{\lambda}_v$ кватерниона $\bar{\lambda}$ [1], то разность $(\tilde{\bar{\lambda}} \circ \bar{p} \circ \bar{\lambda} - \bar{p})$ ортогональна

$\bar{\lambda}_v$, а следовательно, и векторное произведение $\bar{\omega} \times \bar{\varphi}$ ортогонально $\bar{\lambda}_v$. Учитывая, что векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{\varphi}$ также ортогональны векторному произведению $\bar{\omega} \times \bar{\varphi}$, приходим к выводу, что векторы $\bar{\omega}$, $\bar{\varphi}$ и $\bar{\lambda}_v$ являются компланарными и могут быть связаны между собой соотношением

$$\bar{\varphi} = k_1\bar{\omega} + k_2\bar{\lambda}_v, \tag{9}$$

где k_1, k_2 — подлежащие определению скалярные коэффициенты, которые в общем случае зависят от фазовых координат $\bar{\lambda}$ и $\bar{\omega}$.

Учитывая соотношение (9) и конечные условия (3), найдем постоянную C, входящую в скалярный первый интеграл (6): $C = -2\alpha_1$.

Подставляя выражение (9) в формулу для оптимального управления (4), получаем закон оптимального управления в виде функции фазовых координат

$$\bar{u}^{opt} = \frac{1}{2\alpha_3}(k_1\bar{\omega} + k_2\bar{\lambda}_v). \tag{10}$$

Коэффициенты k_1 и k_2 являются коэффициентами усиления нелинейной обратной связи. Они должны удовлетворять двум условиям: во-первых, закон управления (10) должен обеспечивать асимптотически устойчивый перевод твердого тела из заданного начального состояния (2) в ориентированное положение (3), во-вторых, соотношение (9) должно удовлетворять системе дифференциальных уравнений (5). Для определения этих коэффициентов можно воспользоваться прямым методом А.М. Ляпунова исследования устойчивости движения и теоремой Н.Н. Красовского об оптимальной стабилизации [2, 3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №08-01-00310).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973.

2. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.

3. *Ройтенберг Я.Н.* Автоматическое управление. М.: Наука, 1978.

УДК 550.834

В.М. Гурьянов, О.А. Воронцова

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МОНОТИПНЫХ ВОЛН

Энергетический подход [1] к получению дифференциальных уравнений нелинейных упругих волн конечных деформаций приводит к системе уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} &\overline{q_t} - A(\overline{p})\overline{P_x} = 0, \\ &\overline{q_x} - \overline{P_t} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$