УДК 519.4

Д.А. Бредихин

О МНОГОБРАЗИИ ДИСТРИБУТИВНЫХ РЕШЕТОК С ОПЕРАЦИЯМИ ЦИЛИНДРОФИКАЦИИ

В статье находится базис тождеств многообразий дистрибутивных решеток и инволютированных дистрибутивных решеток, порожденных классом решеток бинарных отношений, оснащенных операциями цилиндрофикации и инволюции.

Дистрибутивной решеткой называется алгебра $(A, +, \cdot)$ типа $(2, 2)$, удовлетворяющая тождествам

$$x+x = x,\ x+y = y+x,\ (x+y)+z = x+(y+z),\ xx = x,\ xy = yx,\ (xy)z = x(yz),$$

$$x(x + y) = x,\ x + xy = x,\ x(y + z) = xy + xz.$$

Инволютированной дистрибутивной решеткой назовем алгебру $(A,\ +,\ \cdot,\ ^{-1})$ типа $(2, 2, 1)$, где $(A,\ +,\ \cdot)$ — дистрибутивная решетка и $^{-1}$ — унарная операция, удовлетворяющая тождествам

$$(x^{-1})^{-1} = x,\ (x + y)^{-1} = x^{-1} + y^{-1},\ (xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}.$$

Булева алгебра $(A,\ +,\ \cdot,\ ^{-})$ — это алгебра типа $(2, 2, 1)$, где $(A,\ +,\ \cdot)$ — дистрибутивная решетка и $^{-}$ — унарная операция, удовлетворяющая тождествам

$$(x + y)^{-} = x^{-}y^{-},\ (xy)^{-} = x^{-} + y^{-}.$$

Теория булевых алгебр является алгебраической версией логики высказываний. Рассмотрение позитивной части логики высказываний (совокупности предложений, в записи которых используются только операции конъюнкции и дизъюнкции) сводится к изучению класса дистрибутивных решеток. Однако булевых операций оказывается недостаточно для алгебраизации логики предикатов. Это приводит к необходимости рассмотрения ряда дополнительных операций над отношениями. К таким операциям, в частности, относятся операции цилиндрофикации, являющиеся алгебраическими аналогами кванторов существования. Изучение возникающих таким образом алгебр может быть осуществлено в рамках теории булевых алгебр с дополнительными операциями [1]. Классическим примером таких алгебр являются так называемые цилиндрические алгебры [2].

Обозначим через $Rel(X)$ множество всех бинарных отношений, заданных на базисном множестве X. Множество бинарных отношений $\Phi \subset Rel(X)$, замкнутое относительно некоторой совокупности Ω операций над ними, образует алгебру $(\Phi,\ \Omega)$, называемую алгеброй отношений. Основы теории алгебр отношений были заложены в работах А. Тарского [3, 4] и в дальнейшем были развиты в работах многочисленных авторов [5, 6].

Обозначим $R\{\Omega\}$ класс алгебр, изоморфных алгебрам отношений с операциями из Ω. Пусть $Q\{\Omega\}$ и $Var\{\Omega\}$ — квазимногообразие и многообразие, порожденное классом $R\{\Omega\}$.

Нами будут рассмотрены операции объединения $\cup$, пересечения $\cap$, обращения $^{-1}$ отношений, а также операции цилиндрофикации D_1 и D_2 , определяемые следующим образом:

$$D_1(\rho) = pr_1\rho \times X \text{ и } D_2(\rho) = X \times pr_2\rho,$$

где $pr_1\rho = \{x : (\exists y)(x, y) \in \rho\}$ и $pr_2\rho = \{y : (\exists x)(x, y) \in \rho\}$ — первая и вторая проекции отношения $\rho \in Rel(X)$ соответственно.

Общеизвестно, что класс $R\{\cup,\ \cap,\ ^-\}$ совпадает с классом всех булевых алгебр, класс $R\{\cup,\ \cap\}$ — с классом всех дистрибутивных решеток, а класс $R\{\cup,\ \cap,\ ^{-1}\}$ — с классом всех инволютированных дистрибутивных решеток. Квазимногообразие $Q\{\cup,\ \cap,\ ^-,\ D_1,\ D_2\}$, порожденное классом цилиндрических алгебр бинарных отношений, является многообразием, которое может быть задано с помощью конечной системы тождеств (см. [2]). Замети также, что операции цилидрофикации отношений находят применение в модальной логике [7].

Нами будут рассмотрены классы $R\{\cup,\ \cap,\ D_1\}$, $Var\{\cup,\ \cap,\ D_2\}$, $R\{\cup,\ \cap,\ D_1,\ D_2\}$ и $R\{\cup,\ \cap,\ ^{-1},\ D_1,\ D_2\}$. Основные результаты статьи формулируются в следующих теоремах.

Теорема 1. *Многообразия* $Var\{\cup,\ \cap,\ D_1\}$ *и* $Var\{\cup,\ \cap,\ D_2\}$ *совпадают. Алгебра* $(A,\ +,\ \cdot,\ ^\circ)$ *типа* $(2, 2, 1)$ *принадлежит многообразию* $Var\{\cup,\ \cap,\ D_1\}$ *тогда и только тогда, когда* $(A,\ +,\ \cdot)$ — *дистрибутивная решетка и выполняется следующая система тождеств:*

$$(x + y)^\circ = x^\circ + y^\circ \quad (x^\circ)^\circ = x^\circ, \quad x^\circ x = x.$$

Теорема 2. *Алгебра* $(A,\ +,\ \cdot,\ ^\circ,\ ^\bullet)$ *типа* $(2,2,1,1)$ *принадлежит многообразию* $Var\{\cup,\ \cap,\ D_1,\ D_2\}$ *тогда и только тогда, когда* $(A,\ +,\ \cdot)$ *— дистрибутивная решетка и выполняется следующая система тождеств:*

$$(x+y)^\circ = x^\circ + y^\circ \ (1),\quad (x+y)^\bullet = x^\bullet + y^\bullet; (2),\quad (x^\circ)^\circ = x^\circ (3),\quad (x^\bullet)^\bullet = x^\bullet (4),$$

$$x^\circ x = x = x x^\bullet \ (5),\quad (x^\circ)^\bullet = (x^\bullet)^\circ \ (6).$$

Теорема 3. *Алгебра* $(A,\ +,\ \cdot,\ ^{-1}\ ^\circ,\ ^\bullet)$ *типа* $(2,2,1,1,1)$ *принадлежит многообразию* $Var\{\cup,\ \cap,\ ^{-1},\ D_1,\ D_2\}$ *тогда и только тогда, когда* $(A,\ +,\ \cdot,\ ^{-1})$ *— инволютированная дистрибутивная решетка, выполняются тождества (1-6) и тождество*

$$(x^\circ)^{-1} = (x^{-1})^\bullet.$$

Идея доказательства теорем состоит в использовании результатов работ [8, 9, 10], дающих описание эквациональных теорий классов алгебр отношений с позитивными операциями, и некоторых теоретико-графовых методов. В заключение сформулируем ряд проблем, касающихся рассмотренных алгебр отношений.

Проблема 1. Являются ли классы $R\{\cup,\ \cap,\ D_1\}$, $R\{\cup,\ \cap,\ D_2\}$, $R\{\cup,\ \cap,\ D_1,\ D_2\}$ и $R\{\cup,\ \cap,\ ^{-1},\ D_1,\ D_2\}$ квазимногообразиями?

Проблема 2. Являются ли квазимногообразия $Q\{\cup,\ \cap,\ D_1\}$, $Q\{\cup,\ \cap,\ D_2\}$, $Q\{\cup,\ \cap,\ D_1,\ D_2\}$ и $Q\{\cup,\ \cap,\ ^{-1},\ D_1,\ D_2\}$ многообразиями?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Jónsson B., Tarski A.* Boolean algebras with operations, II // Amer. J. Math. 1952. V. 74. P. 127-162.

2. *Henkin L., Monk J.D., Tarski A.* Cylindric Algebras. North-Holland, Amsterdam. Part I, 1971.

3. *Tarski A.* On the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1941. V. 6. P. 73-89.

4. *Tarski A.* Some methodological results concerning the calculus of rela-tions // J. Symbolic Logic. 1953. V. 18. P. 188-189.

5. *Вагнер В.В.* Теория отношений и алгебра частичных преобразований // Теория полугрупп и ее приложения. Саратов, 1965. Вып. 1. С. 3-197.

6. *Schein B.M.* Relation algebras and function semigroups // Semigroup Forum. 1970. V. 1. P. 1-62.

7. *Venema Y.* Many-Dimensional Logic. Universitiet van Amsterdam, 1989.

8. *Бредихин Д.А.* Эквациональная теория алгебр отношений с позитивными операциями // Изв. Вузов. Сер. Матем. 1993. 3. С. 23-30.

9. *Бредихин Д.А.* О квазитождествах алгебр отношений с диофантовыми операциями // Сибирск. мат. журн. 1997. Т. 38. С. 29-41.

10. *Бредихин Д.А.* Об алгебрах отношений с диофантовыми операциями // Доклады РАН. 1998. Т. 360. С. 594-595.