УДК 517.984

С.А. Бутерин

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПУЧКОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА С УСЛОВИЯМИ ДИРИХЛЕ

1. Рассмотрим краевую задачу $L := L(q_0(x), q_1(x))$ вида

$$y'' + (\rho^2 - 2\rho q_1(x) - q_0(x))y = 0, \quad 0 < x < \pi, \tag{1}$$

$$y(0) = y(\pi) = 0, \tag{2}$$

где $q_j(x) \in W_1^j[0,\pi]$ – комплекснозначные функции, а ρ – спектральный параметр. В статье исследуется обратная задача восстановления пучка L по спектральным характеристикам. В качестве основной спектральной характеристики используется функция Вейля, являющаяся аналогом классической функции Вейля для оператора Штурма – Лиувилля. Показана эквивалентность функции Вейля заданию спектров двух краевых задач для уравнения (1) с одним общим краевым условием, а также спектру вместе с так называемыми весовыми числами. С помощью развития идей метода спектральных отображений [1, 2] доказана единственность решения обратной задачи. Отметим, что обратная задача для дифференциальных пучков второго порядка с вещественными коэффициентами при некотором дополнительном ограничении, обеспечивающем, в частности, простоту спектра, исследовалась в [3] и других работах методом оператора преобразования. В [4] решена обратная задача восстановления дифференциального уравнения (1) на полуоси по функции Вейля.

2. Пусть функции $S(x,\rho)$, $S_1(x,\rho)$, $C(x,\rho)$ и $\Psi(x,\rho)$ являются решениями уравнения (1) и удовлетворяют условиям $S(0,\rho) = S_1(\pi,\rho) = C'(0,\rho) = \Psi(\pi,\rho) = 0$, $S'(0,\rho) = -S_1'(\pi,\rho) = C(0,\rho) = \Psi(0,\rho) = 1$. Функции $\Psi(x,\rho)$ и $M(\rho) := \Psi'(0,\rho)$ называются соответственно решением Вейля и функцией Вейля пучка L. Обозначим $\langle y, z\rangle := yz' - y'z$. Собственные значения ρ_n, $|n| \in \mathbb{N}$, краевой задачи (1), (2) совпадают с нулями ее характеристической функции $\Delta(\rho) := \langle S_1(x,\rho), S(x,\rho)\rangle = S(\pi,\rho) = S_1(0,\rho)$. Имеем

$$\Psi(x,\rho) = C(x,\rho) + M(\rho)S(x,\rho) = \frac{S_1(x,\rho)}{\Delta(\rho)}, \quad M(\rho) = -\frac{\Delta_1(\rho)}{\Delta(\rho)}, \tag{3}$$

где $\Delta_1(\rho) = -S_1'(0,\rho)$ – характеристическая функция краевой задачи для уравнения (1) с краевыми условиями $y'(0) = y(\pi) = 0$. Обозначим ρ_n^1, $n \in \mathbb{Z}$, – ее собственные значения. Очевидно, что $\{\rho_n\} \cap \{\rho_n^1\} = \varnothing$. Таким образом, $M(\rho)$ – мероморфная функция с полюсами ρ_n и нулями ρ_n^1. Положим

$$Q(x) = \int_0^x q_1(t)\,dt, \quad \omega = \frac{1}{\pi}Q(\pi), \quad G_\delta^\alpha = \{\rho : |\rho - k - \alpha| \ge \delta,\, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Известным методом (см., например, [2]) доказывается следующая

Лемма 1. *Имеют место представления:*

$$\left.\begin{aligned} \rho S(x,\rho) &= \sin(\rho x - Q(x)) + \eta(x,\rho), \\ \rho S_1(x,\rho) &= \sin(\rho(\pi - x) - Q(\pi) + Q(x)) + \eta_1(x,\rho), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где

$$\eta^{(\nu)}(x,\rho),\ \eta_1^{(\nu)}(\pi - x,\rho) = O\Big(\frac{1}{\rho^{1-\nu}}\exp(|Im\rho|x)\Big), \quad |\rho|\to\infty, \quad \nu = 0,1, \tag{5}$$

равномерно по $x \in [0,\pi]$. *Кроме того,*

$$\Delta(\rho) = \frac{\sin(\rho-\omega)\pi}{\rho-\omega}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big), \quad |\rho|\to\infty, \quad \rho \in G_\delta^\omega, \tag{6}$$

$$\Delta_1(\rho) = \cos(\rho-\omega)\pi\Big(1 + O\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big), \quad |\rho|\to\infty, \quad \rho \in G_\delta^{\omega+\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

Используя (6), (7) и теорему Руше, известным методом [2] получаем, что

$$\rho_n = n + \omega + O\Big(\frac{1}{n}\Big), \quad \rho_n^1 = n - \frac{1}{2} + \omega + O\Big(\frac{1}{n}\Big), \quad |n|\to\infty. \tag{8}$$

Без ущерба для общности будем предполагать, что $\rho_n \neq \rho_k$ при $nk < 0$. Обозначим m_n – кратность собственного значения ρ_n ($\rho_n = \rho_{n+1} = \ldots = \rho_{n+m_n-1}$) и положим $\mathbb{S} := \{n :\, n \in \mathbb{Z}\setminus\{0,1\},\, \rho_{n-1} \neq \rho_n\} \cup \{1\}$. Согласно (8) для достаточно больших $|n|$ имеем $m_n = 1$. С помощью метода контурного интегрирования доказывается следующее утверждение.

Теорема 1. *Справедливо представление*

$$M(\rho) = \sum_{n\in\mathbb{S}}\sum_{\nu=0}^{m_n-1}\frac{M_{n+\nu}}{(\rho-\rho_n)^{\nu+1}}.$$

Коэффициенты M_n, $|n| \in \mathbb{N}$, называются весовыми числами. Они обобщают классические весовые числа для самосопряженного оператора Штурма – Лиувилля, являющиеся величинами скачков его спектральной функции. Как и для несамосопряженного оператора Штурма – Лиувилля [5], можно получить выражение чисел M_n через собственные и присоединенные функций пучка L.

С помощью асимптотик (6)–(8) и теоремы Адамара о разложении целой функции конечного порядка в бесконечное произведение доказывается следующее утверждение.

Теорема 2. *Справедливы представления*

$$\Delta(\rho) = \frac{\sin \omega\pi}{\omega} \exp\Big(\Big(\frac{1}{\omega} - \pi \operatorname{ctg} \omega\pi\Big)\rho\Big) \prod_{|n|\in\mathbb{N}} \frac{\rho_n - \rho}{n+\omega} \exp\Big(\frac{\rho}{n+\omega}\Big), \quad \omega \notin \mathbb{Z}, \tag{9}$$

$$\Delta_1(\rho) = \cos \omega\pi \exp(\pi\rho \operatorname{tg} \omega\pi) \prod_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\rho_n^1 - \rho}{n - \frac{1}{2} + \omega} \exp\Big(\frac{\rho}{n - \frac{1}{2} + \omega}\Big), \quad \omega - \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}. \tag{10}$$

(Случаи других значений ω вносят незначительные изменения.)

Заметим, что из асимптотики (8) величина ω определяется с точностью до целого слагаемого, и поэтому функции $\Delta(\rho)$, $\Delta_1(\rho)$ согласно (9), (10) определяются по своим нулям с точностью до знака. Однако функция Вейля $M(\rho)$ согласно (3), (9), (10) определяется по спектрам $\{\rho_n\}_{|n|\in\mathbb{N}}$, $\{\rho_n^1\}_{n\in\mathbb{Z}}$ однозначно. Таким образом, задание функции Вейля $M(\rho)$ равносильно заданию двух спектров $\{\rho_n\}_{|n|\in\mathbb{N}}$, $\{\rho_n^1\}_{n\in\mathbb{Z}}$ или спектральных данных $\{\rho_n, M_n\}_{|n|\in\mathbb{N}}$.

Обратная задача формулируется следующим образом: задана функция Вейля $M(\rho)$, найти L. Докажем теорему единственности решения обратной задачи. Для этого наряду с L будем рассматривать пучок $\tilde{L} = L(\tilde{q}_0(x), \tilde{q}_1(x))$. Условимся, что если некоторый символ α обозначает объект, относящийся к L, то $\tilde{\alpha}$ обозначает аналогичный объект, относящийся к $\tilde{L}$, и $\hat{\alpha} = \alpha - \tilde{\alpha}$.

Теорема 3. *Если $M(\rho) = \tilde{M}(\rho)$, то $L = \tilde{L}$, то есть $q_1(x) \equiv \tilde{q}_1(x)$ и $q_0(x) = \tilde{q}_0(x)$ почти всюду на $[0, \pi]$.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу $P(x,\rho) = [P_{jk}(x,\rho)]_{j,k=1,2}$, определяемую равенством

$$P(x,\rho) \begin{bmatrix} \tilde{S}(x,\rho) & \tilde{\Psi}(x,\rho) \\ \tilde{S}'(x,\rho) & \tilde{\Psi}'(x,\rho) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(x,\rho) & \Psi(x,\rho) \\ S'(x,\rho) & \Psi'(x,\rho) \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Так как $\langle S(x,\rho), \Psi(x,\rho)\rangle = -1$, то

$$\left.\begin{aligned} P_{j1}(x,\rho) &= \Psi^{(j-1)}(x,\rho)\tilde{S}'(x,\rho) - S^{(j-1)}(x,\rho)\tilde{\Psi}'(x,\rho), \\ P_{j2}(x,\rho) &= S^{(j-1)}(x,\rho)\tilde{\Psi}(x,\rho) - \Psi^{(j-1)}(x,\rho)\tilde{S}(x,\rho). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Согласно (3)–(6) для любого фиксированного $\delta > 0$ будем иметь

$$P_{11}(x,\rho) = \cos \hat{Q}(x) + O\Big(\frac{1}{\rho}\Big), \quad P_{12}(x,\rho) = -\frac{\sin \hat{Q}(x)}{\rho} + O\Big(\frac{1}{\rho^2}\Big) \tag{13}$$

при $|\rho| \to \infty$, $\rho \in G_\delta^\omega$ равномерно по $x \in [0, \pi]$. Кроме того, (3), (12) дают

$$P_{11}(x,\rho) = C(x,\rho)\tilde{S}'(x,\rho) - S(x,\rho)\tilde{C}'(x,\rho) + \hat{M}(\rho)S(x,\rho)\tilde{S}'(x,\rho),$$

$$P_{12}(x,\rho) = S(x,\rho)\tilde{C}(x,\rho) - C(x,\rho)\tilde{S}(x,\rho) - \hat{M}(\rho)S(x,\rho)\tilde{S}(x,\rho).$$

Поскольку $\hat{M}(\rho) = 0$, для каждого фиксированного $x \in [0,\pi]$ функции $P_{1j}(x,\rho)$, $j = 1,2$, являются целыми аналитическими по ρ, что вместе с (13) дает $P_{11}(x,\rho) \equiv \cos\hat{Q}(x)$, $P_{12}(x,\rho) \equiv 0$. Также имеем $\sin\hat{Q}(x) \equiv 0$. Следовательно, $\hat{Q}(x) \equiv \pi\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{Z}$. В силу непрерывности $\hat{Q}(x)$ число α не зависит от x, и поэтому $\hat{Q}(x) \equiv 0$, то есть $q_1(x) \equiv \tilde{q}_1(x)$. Получаем $P_{11}(x,\rho) \equiv 1$. Согласно (11) получаем $S(x,\rho) = \tilde{S}(x,\rho)$, и следовательно, $q_0(x) = \tilde{q}_0(x)$ почти всюду на $[0,\pi]$. □

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (проекты МК-1701.2007.1 и НШ-2970.2008.1), РФФИ и ННС (проекты 07-01-00003, 07-01-92000-ННС-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Yurko V.* Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht: VSP, 2002.

2. *Юрко В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.

3. *Гасымов М.Г., Гусейнов Г.Ш.* Определение оператора диффузии по спектральным данным // ДАН Азерб. ССР. 1981. Т.37, №2. С.19–23.

4. *Юрко В.А.* Обратная задача для пучков дифференциальных операторов // Матем. сб. 2000. Т.191, №10. С.137–160.

5. *Buterin S.A.* On inverse spectral problem for non-selfadjoint Sturm – Liouville operator on a finite interval // J. Math. Anal. Appl. 2007. V.335. Issue 1. 739–749.

УДК 512.7

А.М. Водолазов

АЛГЕБРЫ ЦЕЛОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ТОРОВ МАЛОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Пусть k – поле p-адических чисел, O – кольцо целых p-адических. T – алгебраический k-тор. В работах [1-3] рассматривается алгебра

$$A = \{f \in k[T] \mid f(U_k) \subset O\} ,$$

где U_k – максимальная компактная подгруппа группы $T(k)$. Эта алгебра представляет интерес при исследовании целых моделей алгебраических торов. Она имеет бесконечный набор образующих. В [1] был поставлен ряд вопросов об изучение свойств этой алгебры. В частности, вопрос о нахождении образующих для разложимых торов $T = G_m^n$. Образующие для разложимых торов были найдены в работе [4].

Дальнейшие изучение алгебры A можно проводить в двух направлениях. Во-первых, переходить к более сложным классам алгебраических торов,