между x и t,

$$|L_n(f;x) - f(x) - \frac{v(x)}{2n}| \le$$
$$\le \Big| L_n\Big(f'(x)(t-x);x\Big)\Big| + \frac{1}{2}L_n\Big(|f''(\xi)-f''(x)|\cdot(t-x)^2;x\Big) \le$$
$$\le \frac{1}{2}L_n\left(\left(1+\frac{(\xi-x)^2}{\delta^2}\right)(t-x)^2\omega(f'';\delta);\ x\right)\le$$
$$\le \frac{1}{2}\omega(f'';\delta)\left[\frac{v(x)}{n}+\frac{1}{\delta^2}\left(\frac{3v^2(x)}{n^2}+\frac{v(x)v'^2(x)+v^2(x)v''(x)}{n^3}\right)\right] =$$
$$= \frac{v(x)\omega(f'',\delta)}{2n}\left[4+\frac{v''(x)}{n}+\frac{v'^2(x)}{nv(x)}\right] \le 3\frac{v(x)}{n}\cdot\omega\left(f'';\frac{v(x)}{n}\right)$$

и доказано третье утверждение теоремы, из которого, в частности, следует, что порядок приближения рассмотренной последовательностью операторов не выше, чем $1/n^2$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00167).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Гудошникова Е.В.* Конструкция линейных положителных операторов // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2007. Вып. 9. С. 20-22.

2. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анлиза. М., 1962. Т.1

УДК 517.518.82

С.И. Дудов, Е.В. Сорина

КРИТЕРИЙ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ СЕГМЕНТНОЙ ФУНКЦИИ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ПОЛОСОЙ

Рассматривается задача наилучшего равномерного на отрезке приближения в метрике Хаусдорфа сегментной функции полосой постоянной ширины, осью которой является полином заданной степени. Средствами и в терминах выпуклого анализа получен критерий решения задачи, а также достаточные условия решения в форме, сравнимой с чебышевским альтернансом.

1. Пусть $F(t) = [g_1(t), g_2(t)]$ — сегментная функция (с.ф.), заданная на отрезке $[c,d]$ непрерывными функциями $g_1(t) \le g_2(t)$, а с.ф. $\Pi_{n,r}(A,t) = [P_n(A,t)-r, P_n(A,t)+r]$ задаёт полиномиальную полосу ширины $2r$, осью

которой является полином $P_n(A,t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ с вектором коэффициентов $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in R^{n+1}$.

Рассмотрим задачу

$$\phi(A,r) \equiv \max_{t\in[c,d]} \max\{|g_1(t) - P_n(A,t) + r|, |g_2(t) - P_n(A,t) - r|\} \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \min_{A\in R^{n+1}, r\geq 0}. \quad (1)$$

В записи целевой функции $\phi(A,r)$ экстремальной задачи (1) выражение $\max\{\cdot\}$ является расстоянием Хаусдорфа между сегментом $F(t)$ и сегментом $\Pi_{n,r}(A,t)$. Однако эта задача принципиально отличается от задачи приближения в метрике Хаусдорфа графика с.ф. графиком полинома, рассматриваемой в [1]. Если же в задаче (1) зафиксировать значение r и минимизировать $\phi(A,r)$ только по A, то в зависимости от этого значения её связь с некоторыми другими задачами по оценке с.ф. полиномиальной полосой отмечалась в [2]. Обозначим через

$$\rho(A) = \max_{t\in[c,d]} \max\{P_n(A,t) - g_1(t), g_2(t) - P_n(A,t)\},$$

$$\pi(A) = \max_{t\in[c,d]} \max\{g_1(t) - P_n(A,t), P_n(A,t) - g_2(t)\}.$$

Нетрудно показать, что

$$\phi(A,r) = \max\{\rho(A) - r, \pi(A) + r\}. \quad (2)$$

Будем также использовать следующие обозначения:

$$R_1^\rho(A) = \{t \in [c,d] : \rho(A) = P_n(A,t) - g_1(t) > g_2(t) - P_n(A,t)\},$$
$$R_2^\rho(A) = \{t \in [c,d] : \rho(A) = g_2(t) - P_n(A,t) > P_n(A,t) - g_1(t)\},$$
$$R_3^\rho(A) = \{t \in [c,d] : \rho(A) = P_n(A,t) - g_1(t) = g_2(t) - P_n(A,t)\},$$
$$R_1^\pi(A) = \{t \in [c,d] : \pi(A) = P_n(A,t) - g_2(t) > g_1(t) - P_n(A,t)\},$$
$$R_2^\pi(A) = \{t \in [c,d] : \pi(A) = g_1(t) - P_n(A,t) > P_n(A,t) - g_2(t)\},$$
$$R_3^\pi(A) = \{t \in [c,d] : \pi(A) = P_n(A,t) - g_2(t) = g_1(t) - P_n(A,t)\},$$

$R_1(A) = R_1^\rho(A) \cup R_1^\pi(A), R_2(A) = R_2^\rho(A) \cup R_2^\pi(A), coB$ — выпуклая оболочка множества B, $O_{n+1} = (0,\ldots,0) \in R^{n+1}, < \cdot, \cdot >$ — скалярное произведение. Очевидно, функции $\rho(A)$ и $\pi(A)$ являются выпуклыми на R^{n+1}. Используя субдифференциальное исчисление выпуклых функций (см.,напр., [3]), нетрудно получить формулы субдифференциалов этих функций

$$\partial\rho(A)(\pi(A)) = co \begin{Bmatrix} (1,t,\ldots,t^n), & t \in R_1^{\rho(\pi)}(A); \\ -(1,t,\ldots,t^n), & t \in R_2^{\rho(\pi)}(A); \\ [-(1,t,\ldots,t^n),(1,t,\ldots,t^n)], & t \in R_3^{\rho(\pi)}(A). \end{Bmatrix} \quad (3)$$

2. Приведём критерий решения задачи (1).

Теорема 1.*Для того чтобы пара* (A^*, r^*) *была решением задачи (1), необходимо и достаточно, чтобы*

$$O_{n+1} \in \partial\rho(A^*) + \partial\pi(A^*), \quad r^* = (\rho(A^*) - \pi(A^*))/2. \tag{4}$$

Доказательство. Поскольку $\rho(A) \geq \pi(A)$, то для фиксированного вектора коэффициентов A минимальное значение функции $\phi(A, r)$ по $r \geq 0$ достигается при $r = (\rho(A) - \pi(A))/2$. Подставляя это значение в (2), приходим к выводу, что задача (1) эквивалентна задаче

$$f(A) \equiv \rho(A) + \pi(A) \to \min_{A \in R^{n+1}}. \tag{5}$$

В соответствии с известным фактом из выпуклого анализа [3, с. 142], критерием решения задачи (5) является выполнение включения $O_{n+1} \in \partial f(A^*)$. Осталось заметить, что по теореме Моро–Рокафеллара [3,с.78] субдифференциал суммы двух выпуклых конечных функций является суммой субдифференциалов слагаемых. Теорема доказана.

Теперь покажем, что используя формулы (3), можно получить с помощью теоремы 1 достаточные условия решения конструктивного вида, сравнимого с известным в теории приближения явлением альтернанса.

Теорема 2. *Если для вектора* A^* *найдутся* $n+2$ *пары точек*

$$t_1^{(1)} = t_1^{(2)} < t_2^{(1)} \leq t_2^{(2)} < \ldots < t_{n+1}^{(1)} \leq t_{n+1}^{(2)} < t_{n+2}^{(1)} = t_{n+2}^{(2)} \tag{6}$$

таких, что если $t_i^{(2)} \in R_1^\rho(A^*)(R_2^\rho(A^*), R_1^\pi(A^*), R_2^\pi(A^*))$, *то соответственно* $t_{i+1}^{(1)} \in R_2^\pi(A^*)(R_1^\pi(A^*), R_2^\rho(A^*), R_1^\rho(A^*))$ *и при этом либо* $\{t_i^{(1)}, t_i^{(2)}\} \subset R_1(A^*)$, *либо* $\{t_i^{(1)}, t_i^{(2)}\} \subset R_2(A^*)$. *Тогда вектор* A^* *и* $r^* = (\rho(A^*) - \pi(A^*))/2$ *являются решением задачи (1).*

Доказательство. В силу теоремы 1 нам достаточно доказать включение

$$O_{n+1} \in \partial\rho(A^*) + \partial\pi(A^*). \tag{7}$$

Если предположить противное, то по теореме отделимости ([3,с. 17]) найдётся вектор $A \in R^{n+1}, A \neq O_{n+1}$, такой, что

$$< A, v >>< A, w >, \forall v \in \partial\rho(A^*), w \in \partial\pi(A^*). \tag{8}$$

В соответствии с формулой (3) мы можем подставлять в (8) в качестве $v(w)$ элементы вида $(1, t, \ldots, t^n)$, если $t \in R_1^\rho(A^*)(R_1^\pi(A^*))$, или

$-(1,t,\ldots,t^n)$, если $t \in R_2^{\varrho}(A^*)(R_2^{\pi}(A^*))$. Используя таким образом точки из (6), мы приходим к выводу, что если $P_n(A,t_i^{(2)}) < (>) P_n(A,t_{i+1}^{(1)})$, то $P_n(A,t_{i+1}^{(2)}) > (<) P_n(A,t_{i+2}^{(1)}), i=\overline{1,n}$. Следовательно, производная полинома $P_n(A,t)$ обязана иметь, по крайней мере, n нулей. Это означает, что $A=O_{n+1}$ и противоречит (8). Теорема доказана.

Примеры показывают, что решение задачи (1) может удовлетворять условиям теоремы 2, а может и не удовлетворять, то есть оно не является необходимым условием решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (НШ-2970.2008.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Сендов Б.* Хаусдорфовы приближения. София, 1979. 372 с.

2. *Сорина Е.В.* О наилучшем приближении многозначного отображения полиномиальной полосой // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 13-й Сарат. зимней шк. Саратов, 2006. С. 164-165.

3. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 320 с.

УДК 517.984

М.Ю. Игнатьев

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА 4-ГО ПОРЯДКА ПО НУЛЯМ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим самосопряженный дифференциальный оператор L, порожденный дифференциальным выражением

$$\ell y = y^{(4)} + (p(x)y')' + q(x)y$$

с вещественными коэффициентами $p(x) \in C^2[0,1]$, $q(x) \in C[0,1]$ и краевыми условиями

$$y(0) = y''(0) = y(1) = y''(1) = 0.$$

Пусть $\{\lambda_n\}, n = n_0, n_0+1, \ldots,$ — собственные значения оператора L, занумерованные таким образом, что при $n \to \infty$ $\lambda_n = (n\pi + O(1))^4$ и пусть $y_n(x)$ — соответствующие собственные функции. Обозначим через $X_L^{(n)}$ множество нулей функции $y_n(x)$. Из асимптотик собственных функций [1] следует, что, начиная с некоторого номера N, множества $X_L^{(n)}$ непусты и их элементы $x_j^{(n)}$ могут быть занумерованы так, что справедлива асимптотика $x_j^{(n)} = jn^{-1} + o(n^{-1})$ при $n \to \infty$ равномерно по $c_1 n < j < c_2 n$ для любых фиксированных $0 < c_1 < c_2 < 1$. Обозначим $X_L = \bigcup\limits_{n=\overline{N,\infty}} X_L^{(n)}$. Из асимптотики