$$\le \frac{2d_n}{\pi n} 4n \Big\{ \int_0^{x-\frac{1}{4n}} \frac{dt}{x-t} + \int_{x+\frac{1}{4n}}^1 \frac{dt}{t-x} \Big\}.$$

Учитывая, что $\max\limits_{x\in[0,1]} \ln x(1-x) = \ln\frac{1}{4}$, получаем, что для любого натурального n и произвольного $x \in [0,1]$

$$\Big\{ |y(x,n)| \sum_{k=0}^{k_0-1} |\frac{(-1)^k 2d_n}{\pi n(x-x_{k,n})}| + |y(x,n)| \sum_{k=k_0+1}^{n} |\frac{(-1)^k 2d_n}{\pi n(x-x_{k,n})}| \Big\} \le \frac{16 d_n}{\pi} \ln 2n.$$

Отсюда, из (4) и (5) следует

$$L_n \le 1 + \frac{16 d_n}{\pi} \ln 2n.$$

Учитывая выбор последовательности d_n в (1), получаем утверждение теоремы.

Замечание 1. Рассматриваемая система $\{l_{k,n}\}_{k=0}^{n}$, $n \in \mathbf{N}$, — не полная система Чебышева [2, гл.1, §1), т.е. система $\{l_{k,n}\}_{k=0}^{r}$, $n \in \mathbf{N}, r < n$ не является Т-системой.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 07-01-00167) и гранта Президента РФ (проект НШ-2970.2008.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Даугавет И.К.* Введение в теорию приближения функций. Ленинград: Изд-во Ленинградского университета, 1977.

2. *Карлин С., Стадден В.* Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М.: Наука, 1976.

3. *Привалов А.А.* Теория интерполирования функций. В 2-х кн. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1990.

УДК 517.51

Р.Н. Фадеев

О НЕКОТОРЫХ УСЛОВИЯХ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ

Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ и $2 \le p_n \le N$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \ldots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Если $I_i^k = [i/m_k, (i+1)/m_k)$, $i, k \in \mathbb{Z}_+$, $i < m_k$, то I_i^k разбивается на p_{k+1} интервалов I_j^{k+1}, $p_{k+1}p_{k+2}$ интервалов I_j^{k+2} и т.д.

Для $x \in [0,1)$, записанного в виде $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n/m_n$, $x_n \in \mathbb{Z} \cap [0, p_n)$ (для $x = i/m_k$ берется разложение с конечным числом $x_n \neq 0$), и $k \in \mathbb{Z}_+$, записанного в виде $k = \sum\limits_{j=1}^{\infty} k_j m_{j-1}$, $k_j \in \mathbb{Z} \cap [0, p_j)$, полагаем $\chi_k(x) =$

$\exp\left(2\pi i \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j k_j / p_j\right)$. Система $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ является ортонормированной и полной в $L[0,1)$, что позволяет определить для $f \in L[0,1)$ коэффициенты Фурье $\hat{f}(k) = \int\limits_0^1 f(t)\overline{\chi_k(t)}\,dt$, $k \in \mathbb{Z}_+$ (см. [1, § 1.5]). В данной статье устанавливаются два признака сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|$, т.е. абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)\chi_n(x)$. В отличие от аналогов классических результатов С.Н. Бернштейна и А. Зигмунда (см. [1, § 2.7 при $p_i \equiv 2$), в которых накладываются условия на функцию, здесь важную роль играют условия на коэффициенты Фурье типа квазиположительности. Тригонометрические аналоги теорем 1 и 2 установлены К.Яно [2].

Теорема 1. *Пусть $f \in L[0,1)$ и $m_n \int_0^{1/m_n} f(t)\,dt = O(1)$. Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (|\hat{f}(n)| - \hat{f}(n))$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)\chi_n(x)$ сходится абсолютно.*

Доказательство. Пусть $D_{m_n}(t) = \sum\limits_{k=0}^{m_n-1} \chi_k(t)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда, согласно формуле (1.5.21) из [1, § 1.5] имеем $D_{m_n}(t) = m_n X_{[0,1/m_n)}$, где X_E – индикатор множества E. Поэтому из ортогональности системы $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ следует, что

$$\left|\sum_{k=0}^{m_n-1} \hat{f}(k)\right| = \left|\int_0^1 f(t) D_{m_n}(t)\,dt\right| = \left|m_n \int_0^{1/m_n} f(t)\,dt\right| = O(1).$$

В силу неравенства

$$\sum_{k=0}^{m_n-1} |\hat{f}(k)| \le \left|\sum_{k=0}^{m_n-1} (|\hat{f}(k)| - \hat{f}(k))\right| + \left|\sum_{k=0}^{m_n-1} \hat{f}(k)\right| = O(1)$$

получаем утверждение теоремы.

Пусть $osc(f,[a,b)) = \sup\limits_{x,y\in[a,b)} |f(x) - f(y)|$ и $v_k(f) := osc(f,[0,1/k))$. Через $B[0,1)$ обозначим пространство измеримых и ограниченных функций на $[0,1)$.

Теорема 2. *Пусть $f \in B[0,1)$ и $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — положительная последовательность, такая что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n\lambda_n)^{-1} = \infty, \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n\lambda_n)^{-1} v_n(f) < \infty. \tag{2}$$

Если $\{\hat{f}(n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ *и при этом*

$$\hat{f}(n) \geq -(n\lambda_n)^{-1} v_n(f), \tag{3}$$

то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|$ *сходится.*

Доказательство. По определению $v_n(f) \downarrow$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} v_n(f) = v > 0$, то в силу (1) имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n\lambda_n)^{-1} v_n(f) \geq v \sum_{n=1}^{\infty} (n\lambda_n)^{-1} = \infty,$$

что противоречит (2). Значит, $v = 0$. Далее

$$\left| n\int_0^{1/n} f(t)\,dt - f(0) \right| \leq n\int_0^{1/n} |f(t) - f(0)|\,dt \leq v_n(f) \to 0.$$

В частности, $m_n \int_0^{1/m_n} f(t)\,dt$ ограничены. Если $\hat{f}(n) < 0$, $n \in \mathbb{N}$, то согласно (3) имеем $|\hat{f}(n)| - \hat{f}(n) = -2\hat{f}(n) \leq 2v_n(f)(n\lambda_n)^{-1}$, в противном случае эта разность равна нулю. Из этого неравенства и (2) следует, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (|\hat{f}(n)| - \hat{f}(n))$ сходится и, используя теорему 1, получаем утверждение данной теоремы.

Пусть $z_{k,n}(f) = \sum\limits_{i=0}^{p_{n+1}\dots p_k - 1} osc(f, I_i^k)$, $k \geq n+1$, и $z_{n,n}(f) = osc(f, [0, 1/m_n))$. Тогда $\sup\limits_{k\geq n} z_{k,n}(f)$ обозначим через $\mathcal{F}l(f, [0, 1/m_n))$.

Следствие. *Пусть* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такова, что* $0 < C_1\lambda_{m_k} \leq \lambda_n \leq C_2\lambda_{m_n}$ *при* $n \in [m_k, m_{k+1})$, $k \in \mathbb{Z}_+$, *и верно (1). Если для* $f \in B[0,1)$ *имеем* $\{\hat{f}(n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}l(f, [0, 1/m_n))\lambda_{m_n}^{-1} < \infty, \quad \hat{f}(n) \geq -\mathcal{F}l([f, [0, 1/m_n))(n\lambda_n)^{-1},$$

где $n \in [m_k, m_{k+1})$, $k \in \mathbb{Z}_+$, *то*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)| < \infty$$

.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987.

2. *Yano K.* A note on absolute convergence of Fourier series // Proc. Japan Acad. 1963. V. 39, № 2. P. 65-68.