Если в точке t_{q_j} действует функция f_1, то $p_n\left(A^{**},t_{q_j}\right) < p_n\left(A^{*},t_{q_j}\right)$, если же в точке t_{q_j} действует f_2, то $p_n\left(A^{**},t_{q_j}\right) > p_n\left(A^{*},t_{q_j}\right)$. Тогда ввиду (II) $p_n\left(A^{**}-A^{*},t\right)$ обращается в ноль на каждом интервале $\left(t_{q_j};t_{q_{j+1}}\right)$, $j=\overline{0,l-1}, j=\overline{l+1,n-1}$. Отсюда и из (10) вытекает, что полином $p_n\left(A^{**}-A^{*},t\right)$ имеет n нулей. Следовательно, полином $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}p_n\left(A^{*}-A^{**},t\right)$ имеет $n-1$ нулей в точках, отличных от t_s.

3. Ввиду п.2 и (9) на интервале $\left(t_{q_l};t_{q_{l+1}}\right)$ полином $p_n\left(A^{**}-A^{*},t\right)$ имеет нулевое значение лишь при $t=t_s$, в остальных точках значение полинома положительно, как и в точках t_{q_l} и $t_{q_{l+1}}$, где действует функция f_2. Следовательно, в точке t_s этот полином достигает локального минимума, поэтому $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}p_n\left(A^{*}-A^{**},t_s\right)=0$. Учитывая предыдущий пункт доказательства, получаем, что полином $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}p_n\left(A^{*}-A^{**},t\right)$ имеет n нулей, что противоречит (9).

4. При $t_s < t_{q_0}$ или $t_s > t_{q_n}$ из (10), (II) сразу получаем, что полином $p_n\left(A^{**}-A^{*},t\right)$, имеет $n+1$ нулей, что невозможно. Теорема доказана.

Пример 1. Пусть $T=\{0<1<2<3\}$, $\Phi(0)=[1;2]$, $\Phi(1)=[1;1]$, $\Phi(2)=[2;3]$, $\Phi(3)=[0;0]$, $n=1$, $s=1$, $\nu=1$. Решение задачи (1), (2), $p_1(t)=2/3+1/3t$, удовлетворяет условию (II). Решением безусловной задачи является полином $p_1(t)=7/3-1/3t$.

Пример 2. Пусть $T=\{0<1<2\}$, $\Phi(0)=2$, $\Phi(1)=3$, $\Phi(2)=2$, $n=1$, $s=1$, $\nu=1$. Задача (1), (2) имеет бесконечно много решений $p_1(t)=1-\mathrm{a}+\mathrm{a}t$, $\mathrm{a}\in[-1;1]$, выполняется условие (I). Решение безусловной задачи (Чебышева) $p_1(t)=5/2$ [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-2970.2008.1)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Выгодчикова И.Ю.* О наилучшем приближении дискретного мультиотображения алгебраическим полиномом// Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 25-28.

2. *Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н.* Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.

УДК 517.984

А.В. Голубь

ТЕОРЕМА РАВНОСХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Рассмотрим интегральный оператор

$$Af(x)=\int_0^{\theta(x)} f(t)dt,$$

где $\theta(x) = \frac{2k-1}{n} - x$ при $x \in [\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}]$ и $k = \overline{1,n}$. Функция $\theta(x)$ является инволюцией, то есть $\theta(\theta(x)) \equiv x$ и имеет разрывы первого рода.

В данной статье, в отличие от работы [1], где рассматривается оператор

$$Af(x) = \int\limits_0^{\theta(x)} A(x,t)f(t)dt,$$

$\theta(x) = \frac{1}{2} - x$ при $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, $\theta(x) = \frac{3}{2} - x$ при $x \in \left[\frac{3}{2}; 1\right]$, для получения теоремы равносходимости не требуется предполагать существование A^{-1}.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Если $y = R_\lambda(A)f(x) = (E - \lambda A)^{-1}Af(x)$, то*

$$v'(x) = \lambda Bv(x) + B\Phi(x), \tag{1}$$

$$P_0v(0) + P - 1v(1/n) = 0, \tag{2}$$

где $v(x) = (v_1(x), \ldots, v_{2n}(x))^T$, $v_{2k-1}(x) = y\left(\frac{k-1}{n} + x\right)$, $v_{2k}(x) = y\left(\frac{k}{n} - x\right)$, $k = \overline{1,n}$; $\Phi(x) = (f_1(x), \ldots, f_{2n}(x))^T$, $f_{2k-1}(x) = f\left(\frac{k-1}{n} + x\right)$, $f_{2k}(x) = f\left(\frac{k}{n} - x\right)$, $k = \overline{1,n}$; $x \in \left[0; \frac{1}{n}\right]$. Матрица B размерности $2n \times 2n$ имеет на главной диагонали блоки $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, остальные элементы — нули. Постоянные матрицы P_0 и P_1 размерности $2n \times 2n$ имеют компоненты $P_{0_{1,2}} = 1$, $P_{0_{2k+1,2k-1}} = 1$, $k = \overline{1,n-1}$, $P_{0_{2k,2k}} = 1$, $k = \overline{2,n}$; $P_{1_{2,1}} = 1$,$P_{1_{2k-1,2k-1}} = P_{1_{2k,2k-2}} = -1$, $k = \overline{2,n}$, остальные элементы — нули.

Теорема 2. *Если $v(x)$ удовлетворяет системе (1), (2) и соответствующая однородная система имеет только нулевое решение, то $R_\lambda(A)$ существует и*

$$R_\lambda(A)f(x) = \{v_{2k-1}(x - (k-1)/n),\ x \in [(k-1)/n; k/n],\ k = \overline{1,n}\}.$$

Теорема 3. *Если $v(x)$ удовлетворяет теореме 1, то $h(x) = \Gamma^{-1}v(x)$ удовлетворяет системе*

$$h'(x) = \lambda Dh(x) + \Gamma^{-1}B\Phi(x), \tag{3}$$

$$U(h) = P_0\Gamma h(0) + P_1\Gamma h(1/n), \tag{4}$$

где $D = \Gamma^{-1}B\Gamma = \mathrm{diag}(i, -i, \ldots, i, -i)$, Γ — неособая матрица, у которой на главной диагонали стоят блоки $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ i & i \end{pmatrix}$, остальные элементы равны нулю.

Лемма 1. *Для решения $h(x,\lambda)$ задачи* (3), (4) *имеет место формула*

$$h(x,\lambda) = -Y(x,\lambda)\Delta^{-1}(\lambda)\int\limits_0^{1/n} U_x(g(x,t,\lambda))Q(t)\,dt + g_\lambda G(x),$$

где $Y(x,\lambda) = \operatorname{diag}\left(e^{\lambda ix}, e^{-\lambda ix}, \ldots, e^{\lambda ix}, e^{-\lambda ix}\right)$ *— матрица размерности* $2n\times$ $\times 2n$; $\Delta(\lambda) = U(Y(x,\lambda))$; $U_x(\cdot)$ *означает, что условие* U *по переменной* x; $g(x,t\lambda) = \operatorname{diag}(g_1(x,t\lambda),\ldots,g_{2n}(x,t\lambda))$, $\quad g_{2k+1}(x,t\lambda) = -\varepsilon(t,x)e^{\lambda i(x-t)}$, $g_{2k}(x,t\lambda) = \varepsilon(t,x)e^{-\lambda i(x-t)}$, $k=\overline{1,n}$, *здесь* $\varepsilon(x,t)=1$ *при* $t\le x$ *и* $\varepsilon(x,t)=0$ *при* $t>x$; $G(x) = \Gamma^{-1}B\Phi(x)$; $g_\lambda Q(x) = \int\limits_0^{1/n} g(x,t,\lambda)Q(t)\,dt$.

Лемма 2. $\det\Delta(\lambda) = \left(ie^{\lambda i/n}, ie^{-\lambda i/n}\right)^n$.

Будем считать далее, что $\operatorname{Re}\lambda i \ge 0$. Обозначим через S_δ комплексную λ-плоскость с удаленными вместе с δ-окрестностью нулями $\det\Delta(\lambda)$ и собственных значений краевых задач

$$y'(x) = \pm i\lambda y(x), \quad y(0) = y(1/n).$$

Лемма 3. *Если* $\varepsilon\in(0;1/2n)$, *то для любой* $f(x)\in L[0,1]$ *в области* S_δ *имеет место соотношение*

$$\lim_{r\to\infty}\Big\|\int\limits_{|\lambda|=r}[h(x,\lambda)-u(x,\lambda)]\,d\lambda\Big\|_{C\left[\varepsilon,\frac{1}{n}-\varepsilon\right]} = 0,$$

где $u(x,\lambda)$ *удовлетворяет задаче* $u'(x) = \lambda Du(x) + Q(x)$, $u(0) = u\left(\frac{1}{n}\right)$.

Теорема «равносходимости». *Для любой функции* $f(x)\in L[0,1]$ *и любого* $\varepsilon\in\left(0;\frac{1}{2n}\right)$ *имеет место соотношение*

$$\lim_{r\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\max_{\varepsilon+\frac{k-1}{n}\le x\le\frac{k}{n}-\varepsilon}|S_r(x,f)-\sigma_r(x,f_k)|\right\} = 0,$$

где $S_r(x,f)$ *— частичная сумма ряда Фурье по собственным и присоединенным функциям оператора* A *для тех характеристических чисел* λ_k, *для которых* $|\lambda_k|<r$, $\sigma_r(x,f_k)$ *— частичная сумма ряда Фурье по системе* $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\,e^{2nk\pi ix}\right\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ *функции* $g(x)$ *на отрезке* $x\in[0,1/n]$, $f_k(x) = f\left(\frac{k-1}{n}+x\right)$, $k=\overline{1,n}$, $x\in\left[0;\frac{1}{n}\right]$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Голубь А.В., Хромов А.П.* Теорема равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с инволюцией, допускающей разрывы // Изв. Сарат. ун-та. 2007. Т. 7, вып. 2. С. 5–10.

УДК 517.51

Е.В. Гудошникова

КОНСТРУКЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ИХ АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА

Рассмотрим функции $g(z)$ и $\psi(z)$, удовлетворяющие следующим условиям:

(A) $g(z)$ и $\psi(z)$ аналитические в круге $|z| < a$ и принимают положительные значения на $[0;a]$;

(B) на $[0;a]$ $x\psi'(x) < \psi(x)$;

(C) числа $\alpha_{0,n} = g(0)^n$ и $\alpha_{k,n} = \dfrac{1}{k!}\dfrac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[\Big(g(z)^n\Big)'\psi(z)^k\right]_{z=0}$, $k = \overline{1,\infty}$ неотрицательны.

В работе [1] было показано, что в этом случае функция

$$x(z) = \frac{z\psi(z)}{\psi(z) - z\psi'(z)} \cdot \frac{g'(z)}{g(z)}$$

монотонно возрастает, следовательно, существует обратная ей функция $z(x)$ и $z'(x) > 0$.

По теореме Лагранжа [2] имеет место представление

$$g(x) = g(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{x}{\psi(x)}\Big)^k \alpha_{k,1},$$

откуда легко видеть, что $g'(z) > 0$. Обозначим $v(x) = \dfrac{xg(x)}{z'(x)g'(x)}$.

Для $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ рассмотрим последовательность операторов:

$$L_n(f;x) = \frac{1}{g(z(x))^n}\sum_{k=0}^{\infty} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\alpha_{k,n}\left[\frac{z(x)}{\psi(z(x))}\right]^k.$$

Отметим, что частными случаями этой последовательности являются операторы Бернштейна, Баскакова, Саса-Миракьяна, Каталана и многие другие.